ГЛАВА V.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ.

§ 39. Основные преобразования алгебраических дробей.

Составить формулы решения следующих задач, а затем определить числовое значение ответа при данных числовых значениях букв:

813.

Одна машинистка может переписать рукопись в *a* часов, другая в *b* часов. 1) Какую часть рукописи перепишет каждая машинистка в 1 час? 2) Какую часть рукописи перепишут обе машинистки вместе в 1 час? 3) Через сколько часов они вместе перепишут всю рукопись? Вычислить ответы при: 1) $a=4,b=6$; 2) $a=2\frac{1}{2},b=1\frac{1}{4}$.

814.

Бассейн наполняется одной трубой в $t\_{1}$ часов, другой в $t\_{2}$ часөв. Во сколько времени наполнится бассейн, если открыть одновременно обе трубы? Вычислить при: 1) $t\_{1}=8,t\_{2}=12$;$ 2) t\_{1}=3\frac{3}{4},t\_{2}=3; 3) t\_{1}=0,5,t\_{2}=0,25. $

815.

 Переднее колесо экипажа имеет окружность в а метров, окружность заднего колеса на $b$ метров больше.

1. Сколько оборотов сделает каждое колесо на расстоянии $S$ метров?
2. На сколько оборотов переднее колесо сделает при этом больше заднего?

Вычислить при $a=1,5,b=0,5,S=450$.

816.

В городе $a$ жителей, и население его ежегодно увеличивается на $p\%$. Определить, сколько. жителей будет в городе через год. Вычислить при: 1) $a=15000,p=5$; 2) $a=70000$, $p=3,4$; 3) $a=1000000,p=8,5$.

1. От деревни до города $S$ километров, Во сколько дней можно пройти это расстояние, если каждый день идти по $t$ часов со скоростью $v$ км в час?

Вычислить при: 1) $S=95,t=8,v=4 2) S=36,t=6,v=3$

Записать в виде дроби частное от деления алгебраических выражений:

1. $a:6$;
2. $5:x$;
3. $a:b$;
4. $(a+b):4$;
5. $9:(m-n)$
6. $x+y):(x-y)$;
7. $a^{2}:(a-b)$
8. $3x:\left(2x+5y\right);$
9. $(4m-3n):(m+n)$
10. $\left(x^{2}-2x+1\right):\left(5x^{2}-6x-2\right)$.

819

Какое значение имеют следующие дроби:

1. $\frac{0}{a}$*, если* $a\ne 0$*;*
2. $\frac{0}{2b}$*, если* $b\ne 0$
3. $\frac{0}{x-y}$*, если* $x\ne y$*.*

820

При каких значениях $m$ обращаются в нуль следующие дроби:

1. $\frac{m-2}{3}$
2. $\frac{m+5}{m}$
3. $\frac{m-3}{m+1}$
4. $\frac{m(m-10)}{m+15}$
5. $\frac{(m+2)(m-3)}{m+5}$
6. $\frac{(m+1)(m-4)}{m-3}$

При каких значениях $x$ следунщие дроби не имеют смысла:

1. $\frac{5}{x-1}$
2. $\frac{1}{x+1}$
3. $\frac{x}{x-6}$
4. $\frac{x}{2x-8}$
5. $\frac{x-1}{x+1}$
6. $\frac{1-x}{2-x}$
7. $\frac{1}{x-a}$*;*
8. $\frac{1}{x-b}$*;*
9. $\frac{1}{x^{3}-1}$*;*
10. $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$*.*

1)Найти и внести в таблицу числовое значение дроби $y=\frac{x-1}{x+1}$ при данных в таблице значениях $x$ :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$x$$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | -1 | -2 | -3 | -4 | -5 | -6 | -7 |
| $$y=\frac{x-1}{x+1}$$ |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

1. Пояснить, при каком значении $x$ дробъ $\frac{x-1}{x+1}$ не имеет смысла.

Дана дробь $\frac{a}{a+b}$.

1)Изменится ли величина дроби, если каждое из значений $a$ и $b$ удвоить?

2)Дать ответ на поставленный вопрос для следующих дробей:

1. $\frac{a-b}{a+b}$
2. $\frac{a^{2}}{b}$
3. $\frac{3a^{2}}{5b}$
4. $\frac{a^{2}-b^{2}}{a^{2}+b^{3}}$*.*

Указать, в каких из следующих выражений изменится знак, если изменить знак $x$ на противоположный;

1. $\frac{2}{x}$
2. $\frac{1}{λ^{2}}$
3. $\frac{1}{x^{3}}$
4. $\frac{x^{2}+1}{x^{2}}$
5. $\frac{x^{2}+2}{x}$
6. $\frac{x^{2}}{4+x^{2}}$

Смешано $m$ килограммов чаюо по $a$ рублей и $n$ килограммов по $b$ рублей за килограмм. Сколько стоит килограмм смеси?

Вычислить при: $a=20,b=15,m=6,n=4$.

Сколько нужно грузовых машин для перевозки $n$ мешков картофеля по $p$ килограммов в каждом, если на каждую машину грузить по $t$ тонн?

Вычислить при $n=90,p=50,t=1,5$.

827

Из двух городов, расстояние между которыми $S$ километров, вышли одновременно два поезда навстречу друг другу. Скорость одного поезда $v$ км в час, а скорость второго на $b$ км в час больше скорости первого. Через сколько часов поезда встретятся? Вычислить при $v=30,b=10,S=350$.

828

Для вспахивания поля в $t$ дней требуется $m$ тракторов. Сколько таких же тракторов потребуется, чтобы вспахать это поле на $d$ дней скорее? Вычислить при $t=10,m=6,d=4$.

829

Колхоз заготовил сено на $t$ дней при сжедневном расходе в $m$ килограммов. На сколько дней хватит этого запаса сена, если ежедневный расход уменьшить на $n$ килограммов? Вычислить при $t=120,m=500,n=20$.

Куплено на $S$ рублей $m$ килограммов муки; ежедневно расходуют из этого запаса муки на $n$ рублей. Сколько килограммов муки останется через $t$ дней? Вычислить при $S=64,m=16,n=8,t=5$.

$§40$**.** Сокращение дробей.

Сократить дроби:

1. $\frac{8}{12};\frac{45}{120};\frac{84}{210};\frac{435}{1215};\frac{947}{1009}$; 2) $\frac{15a}{20b}$; 3)$\frac{ab}{ac}$;4)$\frac{6xy}{8x}$;5)$\frac{10mn}{15mp}6)\frac{8ax}{16ay}$;7)$\frac{2a^{2}}{3ab}8)\frac{24m^{3}}{16m^{2}n}$

1) $\frac{m^{5}}{m^{7}}$ 2). $\frac{6a^{2}b^{2}}{8a^{3}b^{1}}$; 3)$\frac{5x^{2}y}{10x^{3}y}$4) $\frac{16p^{1}q^{3}}{32p^{6}q}$5)$\frac{30ab^{1}}{45a^{3}b^{5}}$6) $\frac{12x^{2}yz}{18x^{2}y^{3}z}$ 7) $\frac{4a^{5}b^{4}}{8a^{7}b^{3}}$.

1)$\frac{3a(x+y)^{2}}{9a^{2}(x+y)}$;2)$\frac{10a^{4}b(x-y)^{3}}{15a^{4}b(x-y)^{3}}$;3)$\frac{7x^{3}y^{5}(a+b)}{21x^{3}y^{3}(a+b)^{3}}$;4)$\frac{3(a-b)(a-c)^{2}}{6(a-b)(a-c)}5)\frac{a(b+c)}{a(b+c)}6)\frac{8a(a+b)}{4a(a+b)}$

Не изменяя величины дроби, преобразовать её так, чтобы числитель и знаменатель дроби не содержали знака минус:

1. $\frac{-2a}{-5b}$
2. $\frac{8c^{3}}{-15x}$
3. $-\frac{-3m}{4n}$
4. $-\frac{-x}{-y}$*;*
5. $-\frac{3x^{2}y}{-10z}$*;*
6. $\frac{-4ab}{7cd}$*.*

Не изменяя величины дроби, преобразовать её так, чтобы перед дробью стоял знак минус:

1. $\frac{1-x}{a}$
2. $\frac{m}{1-n}$
3. $\frac{a-b}{c+d}$
4. $\frac{x-5}{x-2}$
5. $\frac{a-x}{b-x}$
6. $\frac{-a-b}{c+d}$*.*

Пояснить справедливость равенств:

1. $\frac{a-2}{b-4}=\frac{2-a}{4-b}=-\frac{a-2}{4-b}=-\frac{2-a}{b-4}$*;*
2. $\begin{matrix}\frac{a}{(x-a)(x-b)}=\frac{a}{(a-x)(b-x)}=-\frac{a}{(a-x)(x-b)}=\\=-\frac{a}{(x-a)(b-x)}\end{matrix}$

Сократить дроби:
837.

*1)* $\frac{a-b}{b-a}$*;
2)* $\frac{a(x-a)}{b(a-x)}$*;
3)* $\frac{5a(x-y)}{15a(y-x)}$*;
4)* $\frac{3m(x-1)}{9m^{2}(1-x)}$ *5)* $\frac{8a^{2}b^{3}(x-5)}{12ab^{1}(5-x)}$*;
6)* $\frac{14xy^{5}(2a-3b)}{21x^{3}y^{1}(3b-2a)}$*.*
838.

*1)* $\frac{5a-5b}{10a}$*;
2)* $\frac{3x+3y}{6x}$*;
3)* $\frac{4m-4n}{8a+8b}$*;
4)* $\frac{6p+6q}{12x+12y}$*.*
839.

*1)* $\frac{ac-bc}{ac+bc}$*;
2)* $\frac{ax+bx}{ax-bx}$*;
3)* $\frac{a^{2}}{a^{2}+ab}$*;
4)* $\frac{xy}{x-xy}$ *5)* $\frac{pq^{3}}{p^{2}q-pq^{2}}$*;
6)* $\frac{ac-bc}{c^{2}+cd^{2}}$*;
7)* $\frac{k^{2}+k}{kx-ky}$*;
8)* $\frac{a^{2}+3ab}{a^{2}b+3ab^{2}}$*.*
840.

*1)* $\frac{x^{2}-2xy}{xy-2y^{3}}$*;
2)* $\frac{3x^{2}+4xy}{9x^{2}y-16y^{2}}$*;
3)* $\frac{2ac-4bc}{5a^{3}c-20acb^{2}}$ *4)* $\frac{x^{2}-2xy}{2y^{2}-xy}$*.*

841

1. $\frac{x-y}{x^{2}-y^{2}}$*;*
2. $\frac{a+1}{a^{2}-1}$*;*
3. $\frac{a^{2}-b^{2}}{ax-bx}$*;*
4. $\frac{3a^{2}-3}{5a-5}$*;*
5. $\frac{a^{3}-2a^{2}}{a^{2}-4}$

842.

1. $\frac{a+a^{2}}{a^{2}-1}$*;*
2. $\frac{x-x^{2}}{x^{2}-1}$*;*
3. $\frac{(a-b)^{2}}{a^{2}-b^{2}}$*;*
4. $\frac{y^{2}-x^{2}}{(x+y)^{2}}$
5. $\frac{a^{2}-1}{1-a}$*;*
6. $\frac{m-n}{(n-m)^{2}}$*.*

843

1)$\frac{(a+1)^{2}}{a^{2}-1}$; 2) $\frac{a^{2}-1}{(a-1)^{2}}$; 3) $\frac{3x^{2}-3xy}{3(x-y)^{2}}$; 4) $\frac{20a^{2}-45b^{2}}{(2a+3b)^{2}}$.

844

1. $\frac{x^{2}+2xy+y^{2}}{x^{2}-y^{2}}$
2. $\frac{a^{2}-2a+1}{a^{2}-1}$
3. $\frac{3a^{2}-6ab+3b^{2}}{6a^{3}-6b^{2}}$*;*
4. $\frac{5m^{2}+10mn+5n^{2}}{15m^{2}-15n^{2}}$

845.

1. $\frac{a^{3}+b^{3}}{a^{2}-b^{2}}$
2. $\frac{p^{3}-q^{3}}{p^{2}-q^{2}}$
3. $\frac{2x^{3}-2y^{3}}{5x^{2}-5y^{3}}$
4. $\frac{3m^{2}-3n^{2}}{6m^{3}+6n^{3}}$

846

1. $1)\frac{x^{4}-y^{4}}{x^{2}+y^{2}}$*;*
2. $\frac{a^{3}-x^{4}}{a^{2}-x^{2}}$
3. $\frac{a^{3}-b^{3}}{a^{4}-b^{4}}$
4. $\frac{x^{4}-y^{4}}{x^{3}+y^{3}}$
5. $\frac{a^{2}+ab+b^{2}}{a^{3}-b^{3}}$*;*
6. $\frac{16-8a+a^{2}}{ab-4b}$*.*

847.

1. $\frac{5x^{3}y+5xy^{2}}{x^{4}-y^{1}}$*;*
2. $\frac{a^{4}-b^{1}}{ab^{2}+a^{2}}$*;*
3. $\frac{2a+4}{a^{3}+8}$
4. $\frac{a^{2}+2ab+b^{2}}{2a^{4}-2b^{4}}$*;*
5. $\frac{1-2a+a^{2}}{a^{2}-1}$
6. $\frac{3n^{2}-3m^{2}}{6m^{3}+6n^{3}}$*;*
7. $\frac{y^{3}-x^{4}}{x^{3}-y^{3}}$
8. $\frac{b^{1}-a^{4}}{a^{2}-b^{2}}$*.*

848

1. $\frac{ax+ay-bx-by}{ax-ay-bx+by}$*;*
2. $\frac{ac-bc+ad-bd}{ac+bc+ad+bd}$*;*
3. $\frac{ab+ac+b^{8}+bc}{ax+ay+bx+by}$*;*
4. $\frac{(a+b)^{2}-c^{3}}{a+b+c}$*.*

849

1. $\frac{a^{2}+b^{2}-c^{2}+2ab}{a^{2}-b^{2}+c^{2}+2ac}$*;*
2. $\frac{x^{3}-x^{2}-x+1}{x^{4}-2x^{2}+1}$
3. $\frac{1-3y+3y^{2}-y^{3}}{z-2y+x-xy}$*;*
4. $\frac{x^{2}-ax+bx-ab}{x^{3}+bx^{2}+ax+ab}$*.*

850\*

1. $\frac{x^{2}+5x+6}{x^{2}+4x+4}$
2. $\frac{a^{2}+3a+2}{a^{2}+6a+5}$
3. $\frac{x^{2}-7x+12}{x^{2}-6x+9}$
4. $\frac{x^{2}+2x+1}{x^{2}+8x+7}$
5. $\frac{2ab-a^{2}-b^{2}+c^{2}}{a^{2}+c^{2}-b^{2}+2ac}$
6. $\frac{a^{3}-a^{2}b+ab^{2}}{b^{3}+a^{3}}$
7. Упростить дроби и найти числовое значение выражений:
8. $\frac{a^{2}-4}{a+2}$*,
если: а)* $a=1,4$*; б)* $a=2,5$
9. $\frac{a^{2}x-ax^{3}}{a-x}$*, если a)* $a=3,5,x=1,12$ *б)* $a=1\frac{1}{2},x=\frac{3}{4}$*;*
10. $\frac{a^{2}-8a+16}{ax-4x}$*,
если: а)* $a=-5,x=-2$*; б)* $a=-0,4,x=2$*;*
11. $\frac{3a^{2}-ab}{9a^{2}-6ab+b^{2}}$*, если a)*$ a=-8,b=\frac{1}{2} $*б)* $a=\frac{3}{4},b=-\frac{2}{3}$*;*
12. $\frac{a^{2}-4}{ac+2c-a-2}$*,*$ если a=3,c=-\frac{3}{4}$ *б)* $a=-2\frac{1}{2},c=-\frac{1}{2}$
13. $\frac{a^{4}-b^{4}}{a^{3}-b^{3}}$*, если: а)* $a=5,b=-3$*; б)* $a=-1,b=-2$*;*
14. $\frac{(x+y)^{2}-z^{2}}{x+y+z}$*если: a)* $x=-4,y=5,z=3,4$*; б)* $x=-1,y=-2,z=-3$*;*
15. $\frac{x^{2}+x^{2}y}{x^{2}+2xy+y^{3}}$ *если: a)* $x=3,y=-2$ *б)* $x=-\frac{1}{2},y=1\frac{1}{2}$

852 Доказать справедливость следующих тождеств:

1. $\frac{ac+bx+ax+bc}{ay+2bx+2ax+by}=\frac{x+c}{2x+y}$*;*
2. $\frac{x-xy+z-2y}{1-3y+3y^{2}-y^{3}}=\frac{x+z}{(1-y)^{2}}$*;*
3. $\frac{3a^{3}+ab^{3}-6a^{2}b-2b^{3}}{9a^{5}-ab^{1}-18a^{2}b+2b^{5}}=\frac{1}{3a^{3}-b^{3}}$*.*

Решить уравнения, принимая за неизвестное букву $x$ :

853.

1. $5x=a$*; 2)* $3x=12b$*; 3)* $4x=3c$*; 4)* $2x=3d$*.*

854.

1. $ax=b$*; 2)* $cx=2a$*; 3)* $4mx=6n$ *4)* $8abx=2a^{2}b$

855.

1. $3x=a+b$*;*
2. $2x-m=n$*;*
3. $3x+b=2a$
4. $5x-3c=4b$

856.

1. $ax=b+c$
2. $ax-p=q$
3. $2mx+a=b$
4. $3nx-5b=2a$

857

1. $5x-10a=15b$*;*
2. $ax+ab=ac$
3. $4m-2x=6n$
4. $pq+px=p$*.*

858

1. $a^{2}x-ab=a$*;*
2. $4mn-2nx=6n^{2}$
3. $m-m^{2}x=mn$*;*
4. $8a^{2}b+12ax=4a^{2}$

859

1. $(a+b)x=c$*;*
2. $bx-cx=a$*;*
3. $(m-n)x=p+q$
4. $x-ax=a$*.*

860

1. $ax-2x=a^{2}-4$*;*
2. $bx-abx=b^{2}c-ab^{2}$*;*
3. $mx-nx=5m-5n$
4. $ax-bx=a^{2}-b^{2}$

861

1. $a^{2}x-b^{2}x=a^{2}+2ab+b^{2}$*;*
2. $3mx+3nx=6m^{2}-6n^{2}$*;*
3. $ax+x=a^{2}+2a+1$
4. $m^{2}x+2mnx+n^{2}x=3m^{2}-3n^{2}$*.*
5. Сложение и вычитание дробей.

862 (устно)

1. $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}$
2. $\frac{5}{8}-\frac{3}{8}$
3. $\frac{a}{4}+\frac{b}{4}$
4. $\frac{x}{5}-\frac{y}{5}$*;*
5. $\frac{a^{2}}{10}-\frac{b}{10}$*;*
6. $\frac{3m^{2}}{5}+\frac{4n^{2}}{5}$*.*

863Устно.)

1. $\frac{5a}{6}+\frac{a}{6}$*;*
2. $\frac{2p^{3}}{5}+\frac{p^{2}}{5}$
3. $\frac{3}{x}+\frac{5}{x}+\frac{1}{x}$*;*
4. $\frac{5}{a}+\frac{4}{a}-\frac{7}{a}$*.*

864 (Устно.)

1. $\frac{a+b}{3}+\frac{a}{3}$
2. $\frac{x-y}{5}+\frac{y}{5}$
3. $\frac{m-n}{a}+\frac{m+n}{a}$*;*
4. $\frac{5x+1}{2}-\frac{x}{2}$*.*

865

1. $\frac{a+3}{4}-\frac{a+1}{4}$
2. $\frac{3p-2q}{m}-\frac{p-q}{m}$*;*
3. $\frac{x-1}{4}+\frac{x+2}{4}-\frac{x-3}{4}$*;*
4. $\frac{2x+1}{b}+\frac{3x+1}{b}-\frac{x-2}{b}$*.*

866

1. $\frac{a+b}{x+a}+\frac{a-b}{x+a}$
2. $\frac{x+4}{a-2}+\frac{x+3}{a-2}$
3. $\frac{1-m}{p-q}-\frac{1-3m}{p-q}$*;*
4. $\frac{3a+1}{x+y}-\frac{2a+3}{x+y}$*.*