Бланк выполнения задания 1

<table>
<tr><th>№ п/п</th><th>Задача</th><th>Ответ</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1.</td><td>Найти производные $y' = \dfrac{dy}{dx}$ функций:</td><td></td></tr>
<tr><td>Условие задачи:
а) $y = \frac{\sqrt{2}}{3} arctg\ \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6}\ln\frac{x+1}{x-1}$</td><td rowspan="2">$$y' = \frac{x^2-4}{3x^4+3x^2-6}$$</td></tr>
<tr><td>Подробное решение:
Применяем правило дифференцирования:
$$(U+V)' = U' + V'$$
$$y' = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} arctg\ \frac{x}{\sqrt{2}}\right)' + \left(\frac{1}{6}\ln\frac{x+1}{x-1}\right)'$$
По формуле $(ax)' = ax'$
$$y' = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(arctg\ \frac{x}{\sqrt{2}}\right)' + \frac{1}{6}\left(\ln\frac{x+1}{x-1}\right)'$$
Найдём производную $\left(arctg\ \frac{x}{\sqrt{2}}\right)'$:
По формуле $(arctg\ u)' = \frac{1}{1+u^2} * u'$
$$\left(arctg\ \frac{x}{\sqrt{2}}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} * \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)' =$$
По формуле $(ax)' = ax'$
$$= \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}} * \frac{1}{\sqrt{2}} * x' =$$
По правилу x’=1
$$= \frac{1}{\frac{2+x^2}{2}} * \frac{\sqrt{2}}{2} * 1 = \frac{2*\sqrt{2}}{(2+x^2)*2} = \frac{\sqrt{2}}{2+x^2}$$
Найдём производную$\left(\ln\frac{x+1}{x-1}\right)'$:
По формуле $(\ln u)' = \frac{1}{u} * u'$
$$\left(\ln\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{x-1}{x+1} * \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' =$$
По формуле $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V-UV'}{V^2}$
$$= \frac{x-1}{x+1} * \frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} =$$
По формуле $(U+V)' = U' + V'$, x’=1 и C’=0</td></tr>
</table>

	$= \frac{x-1}{x+1} * \frac{(1+0)(x-1)-(x+1)(1-0)}{(x-1)^2} =$ $= \frac{x-1}{x+1} * \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)(-2)}{(x+1)(x-1)^2} =$ $= \frac{-2}{(x+1)(x-1)} = \frac{-2}{x^2-1}$ Подставляем полученные выражения в основное: $y' = \frac{\sqrt{2}*\sqrt{2}}{3(2+x^2)} + \frac{1*(-2)}{6(x^2-1)} = \frac{2}{3(2+x^2)} + \frac{-1}{3(x^2-1)}$ $y' = \frac{2(x^2-1)-1(2+x^2)}{3(2+x^2)(x^2-1)} = \frac{2x^2-2-2-x^2}{3(2+x^2)(x^2-1)}$ $y' = \frac{x^2-4}{3(x^4+2x^2-x^2-2)} = \frac{x^2-4}{3x^4+3x^2-6}$	
	Условие задачи: б)$x^4 - xy + y^4 = e^x$	$\frac{4x^3-y-e^x}{-x+4y^3}$
	Подробное решение: $y = x^4 - xy + y^4 - e^x$ По формуле $(U \pm V)' = U' \pm V'$ $y'_x = (x^4)'(-yx)' + (y^4)' - (e^x)'$ По формулам $x^n = n * x^{n-1}$, $(ax)' = ax'$, x’=1, C’=0 и $(e^x)' = e^x$ $y'_x = 4x^3 - y + 0 - e^x = 4x^3 - y - e^x$ По формулам $x^n = n * x^{n-1}$, $(ax)' = ax'$, $(e^u)' = e^u * u'$, u’=x’=c’=0 $y'_y = (x^4)' + (-xy)' + (y^4)' - (e^x)'$ $y'_y = 0 - x + 4y^3 - 0 = -x + 4y^3$ $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_y} = \frac{4x^3-y-e^x}{-x+4y^3}$	
	Условие задачи: в) $y = \left(1+5^{x^2}\right)^x$	$= \left(1+5^{x^2}\right)^{x-1} *$ $* \left(2\ln(5) * 5^{x^2} * x^2 +\right.$ $\left.+\left(1+5^{x^2}\right) * \ln\left(1+5^{x^2}\right)\right)$
	Подробное решение: $y' = \left(\left(1+5^{x^2}\right)^x\right)'$ По формуле $u^{f(x)} = e^{f(x)\ln u}$ $y' = \left(e^{x\ln(1+5^{x^2})}\right)'$	

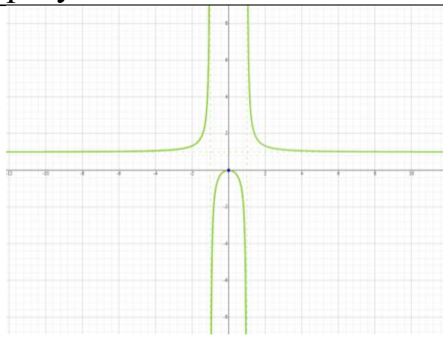
	По формуле $f\big(g(x)\big) = f'(x) * g'(x)$ $$y' = \left(e^{x\ln\left(1+5^{x^2}\right)}\right)' * \left(x\ln\left(1+5^{x^2}\right)\right)'$$ Сделаем замену $x\ln\left(1+5^{x^2}\right) = g$ и по значению $(e^x)' = e^x$ $$y' = (e^g)' * \left(x\ln\left(1+5^{x^2}\right)\right)' = e^g * \left(x\ln\left(1+5^{x^2}\right)\right)'$$ Сделаем обратную замену $g = x\ln\left(1+5^{x^2}\right)$ По формуле $(UV)' = U'V + UV'$ $$y' = e^{x\ln\left(1+5^{x^2}\right)} * \left(x'\ln\left(1+5^{x^2}\right) + x\left(\ln\left(1+5^{x^2}\right)\right)'\right)$$ По формулам $f'_x\big(u(x)\big) = f'_u(u) * u'_x(x)$ и $(\ln u)'_u = \frac{1}{u}$ $$y' = e^{x\ln\left(1+5^{x^2}\right)} * \\ * \left(x'\ln\left(1+5^{x^2}\right) + x * \frac{1}{1+5^{x^2}} * \left(1+5^{x^2}\right)'\right)$$ По формулам $x' = 1$, $(U+V)' = U' + V'$ $$y' = e^{x\ln\left(1+5^{x^2}\right)} * \\ * \left(\ln\left(1+5^{x^2}\right) + x * \frac{1}{1+5^{x^2}} * \left(1' + \left(5^{x^2}\right)'\right)\right)$$ По формулам C’=0, $a^{u(x)'} = a^{u(x)} * \ln(a) * u'(x)$, $x^n = n * x^{n-1}$ $$y' = e^{x\ln\left(1+5^{x^2}\right)} * \\ * \left(\ln\left(1+5^{x^2}\right) + x * \frac{1}{1+5^{x^2}} * \left(5^{x^2} * \ln(5) * (x^2)'\right)\right) = \\ = e^{x\ln\left(1+5^{x^2}\right)} * \\ * \left(\ln\left(1+5^{x^2}\right) + x * \frac{1}{1+5^{x^2}} * 5^{x^2} * \ln(5) * 2x\right) = \\ = e^{x\ln\left(1+5^{x^2}\right)} * \left(\ln\left(1+5^{x^2}\right) + \frac{2\ln(5) * 5^{x^2} * x^2}{1+5^{x^2}}\right)$$ По формуле $x * \ln(a) = \ln(a^x)$ $$y' = e^{\left(\ln\left(1+5^{x^2}\right)\right)^x} * \left(\ln\left(1+5^{x^2}\right) + \frac{2\ln(5) * 5^{x^2} * x^2}{1+5^{x^2}}\right)$$ По формуле $e^{\ln(x)} = x$ $$y' = \left(1+5^{x^2}\right)^x * \left(\ln\left(1+5^{x^2}\right) + \frac{2\ln(5) * 5^{x^2} * x^2}{1+5^{x^2}}\right)$$ Упрощаем $$y' = \left(1+5^{x^2}\right)^x *$$	

	$* \frac{2\ln(5) * 5^{x^2} * x^2 + \left(1+5^{x^2}\right) * \ln\left(1+5^{x^2}\right)}{1+5^{x^2}} =$ $= \left(1+5^{x^2}\right)^{x-1} *$ $* \left(2\ln(5) * 5^{x^2} * x^2 + \left(1+5^{x^2}\right) * \ln\left(1+5^{x^2}\right)\right)$	
2.	Вычислить пределы по правилам Лопиталя:	
	Условие задачи: а)$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg} x}$	$-\frac{1}{2}$
	Подробное решение: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg} x} = \left[\frac{0}{0}\right]$ По правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f\prime(x)}{\varphi\prime(x)}$ И по формулам $(U \pm V)' = U' \pm V'$, x'=1, $(\sin x)' = \cos\ x, tg\ x = \frac{1}{cos^2 x}$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x-\sin x)'}{(x-\operatorname{tg} x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1-\frac{1}{cos^2 x}} = \left[\frac{0}{0}\right] =$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{cos\ x-1}{cos^2 x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{-(1-cos\ x)}{cos^2 x}} =$ По формуле $\sin^2 x + cos^2 x = 1$, следовательно $\sin^2 x = 1 - cos^2 x$ $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{-\sin^2 x}{cos^2 x}} = \lim\limits_{x\to 0} - \frac{(1-\cos x)cos^2 x}{\sin^2 x} =$ $= \lim\limits_{x\to 0} - \frac{(1-\cos x)cos^2 x}{1-cos^2 x} =$ $= \lim\limits_{x\to 0} - \frac{(1-\cos x)cos^2 x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} =$ $= \lim\limits_{x\to 0} - \frac{(1-\cos x)cos^2 x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0} - \frac{cos^2 x}{1+\cos x} =$ $= -\frac{cos^2 0}{1+\cos 0} = -\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}$	
	Условие задачи: б) $\lim\limits_{x\to 10} \frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$	$\frac{1}{6}$
	Подробное решение: $\lim\limits_{x\to 10} \frac{(\sqrt{x-1}-3)'}{(x-10)'} =$	

	По правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f\prime(x)}{\varphi\prime(x)}$ По формуле $(U \pm V)' = U' \pm V'$ $$= \lim_{x\to 10}\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)' - 3'}{x' - 10'} =$$ По формулам x'=1, C'=0, $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} * u'$ $$= \lim_{x\to 10}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}} * (x-1)' - 0}{1-0} =$$ По формулам $(U \pm V)' = U' \pm V'$, x'=1, C'=0 $$= \lim_{x\to 10}\frac{1}{2\sqrt{x-1}} * (1-0) = \lim_{x\to 10}\frac{1}{2\sqrt{x-1}} =$$ $$= \frac{1}{2\sqrt{10-1}} = \frac{1}{6}$$	
	Условие задачи: в) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$	1
	Подробное решение: Неопределенность ∞^0 $$\lim_{n\to\infty}\ln^{\frac{1}{\infty}}(\infty) = \lim_{n\to\infty}\ln\infty^0 1$$ По формуле $\alpha^{\beta} = e^{\beta\ln(\alpha)}$ $$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{\ln(\ln x)}{x}}\right)$$ Предел показательно-степенной функции $\lim\limits_{x\to a}(b)^{f(x)} = b^{\lim\limits_{x\to a}(f(x))}$ если предел $f(x)$ конечный $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right)$$ По правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f\prime(x)}{\varphi\prime(x)}$ По формулам $f'_x\big(u(x)\big) = f'_u(u) * u'_x(x)$ и $(\ln u)'_u = \frac{1}{u}$ $$f'(x) = \frac{1}{\ln(x)}(\ln x)' = \frac{1}{\ln(x)} * \frac{1}{x} = \frac{1}{\mathrm{x} * \ln(x)}$$ Подставляем $x = \infty$ и находим предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\infty*\ln(\infty)} = 0$ Подставляем вычисленный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ $$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{\ln(\ln x)}{x}}\right) = 1$$	

Бланк выполнения задания 2

№ п/п	Задача	Ответ
1.	Рассчитать наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 3x + 1$ на заданном отрезке: $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$	$y_{\text{наим.}} = -\frac{9}{4}$ $y_{\text{наиб.}} = 9$
	1) Найти первую производную и все критические точки:	
	Подробное решение: Находим первую производную: По формуле $(U \pm V)' = U' \pm V'$ $f'(x) = (x^3)' - (3x)' + 1'$ По формулам $x^n = n * x^{n-1}$, $(ax)' = ax'$, x'=1, C'=0 $f'(x) = 3x^2 - 3 * 1 + 0 = 3x^2 - 3$ Находим критические точки: $3x^2 - 3 = 0$ $3x^2 = 3$ $x^2 = 1$ $x_{1,2} = \pm 1$ $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$ – критические точки	
	2) Вычислить значения функции в критических точках:	
	Подробное решение: Квадрат числа всегда положителен, следовательно, значения функций в обеих точках будут равны: $y_1 = y_2 = 3 * 1 - 3 = 0$	
	3) Вычислить значения функции на концах промежутка:	
	Подробное решение: При $x = \frac{1}{2}$: $y_1 = 3 * \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 = -\frac{9}{4}$ При $x = 2$: $y_2 = 3 * 2^2 - 3 = 9$	
	4) Сравнить все полученные значения функции и выбрать среди них самое большое и самое малое:	
	Подробное решение:	

	$-\frac{9}{4} < 9$ $y_1 < y_2$ $y_1 = y_{\text{наим.}} = -\frac{9}{4}$ $y_2 = y_{\text{наиб.}} = 9$	
2a.	Провести полное исследование и построить графики данных функций: $y = \frac{x^2}{x^2-1}$	Построить график, используя полученные результаты
	Найти область определения функции, исследовать её поведение на границах этой области:	
	Подробное решение: Область определения функции (ООФ): знаменатель не должен обращаться в ноль: $x^2 - 1 \neq 0$ $x^2 \neq 1$ $x \neq \pm 1$ ООФ: $(-\infty;\ -1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$ Исследуем поведение функции на границах: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2 - \frac{x^2}{x^2}} =$ $= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{1-0} = 1$ Аналогично: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$ $\lim\limits_{x\to-1^+} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to-1^-} \frac{x^2}{x^2-1} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{x^2}{x^2-1} = +\infty$	
	Найти точки разрыва и классифицировать их с помощью односторонних пределов:	

Подробное решение:

$f(x)$ не существует при x=±1 – точки разрыва

$$\lim_{x\to\pm1}\frac{x^2}{x^2-1}=\pm\infty$$

x=±1 – точки разрыва II рода

Исследовать периодичность, чётность (нечётность):

Подробное решение:

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$$

$$f(-x)=\frac{(-x)^2}{(-x)^2-1}=\frac{x^2}{x^2-1}=f(x)$$

$f(x)=f(-x)$, следовательно, функция чётная

Функция непериодична.

Найти точки пересечения графика с осями координат и интервалы знакопостоянства функции:

Подробное решение:

Пересечение с осью OY:

$x=0$: $y=\frac{0}{0-1}=0$

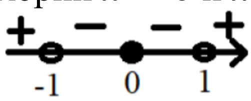
Пересечение с осью OX

$y=0$: $\frac{x^2}{x^2-1}=0$

$x=0$

Определим интервалы знакопостоянства:

Корни $x=0$ и $x\neq\pm1$



$f(x)>0$ при $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

$f(x)<0$ при $(-1;1)$

Найти асимптоты:

Подробное решение:

По уравнению асимптот $\lim\limits_{x\to\infty} kx+b-f(x)$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2-1}}{x}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}f(x)-kx$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$$

Получаем уравнение горизонтальной асимптоты:

y=1

Находим пределы в точке $x_1 = -1$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2}{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty$$

Точка $x_1 = -1$ - вертикальная асимптота

Находим пределы в точке $x_2 = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x^2-1} = +\infty$$

Точка $x_2 = 1$ - вертикальная асимптота

Найти точки экстремума и интервалы монотонности:

Подробное решение:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)'$$

По формуле $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V-UV'}{V^2}$

$$f'(x) = \frac{(x^2)'(x^2-1) - x^2(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}$$

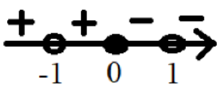
По формулам $x^n = n * x^{n-1}$, $(U \pm V)' = U' \pm V'$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - x^2((x^2)' - 1')}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

$$\frac{-2x}{(x^2-1)^2} = 0 \text{ при } -2x = 0 \text{ и } (x^2-1)^2 \neq 0$$

x=0 *x≠+-1*



$f'(x) > 0$ при $(-\infty; -1) \cup (-1; 0)$ – функция возрастает;

$f'(x) < 0$ при $(0; 1) \cup (1; +\infty)$ – функция убывает.

Согласно графику, в точке $x = 0$ функция меняет знак, $x = 0$ – точка максимума

Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости:

Подробное решение:

$$f''(x) = \left(-\frac{2x}{(x^2-1)^2}\right)'$$

По формуле $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V-UV'}{V^2}$

$$f''(x) = -\frac{(2x)'(x^2-1)^2 - 2x((x^2-1)^2)'}{(x^2-1)^4}$$

По формулам $(ax)' = ax'$, x'=1, $f'(g(x)) = f'(g) * g'(x)$

$$f''(x) = -\frac{2(x^2-1)^2 - 2x * 2(x^2-1) * 2x}{(x^2-1)^4} =$$

$$= -\frac{(x^2-1)(-2(x^2-1)+8x^2)}{(x^2-1)^4} = -\frac{2x^2-2-8x^2}{(x^2-1)^3} =$$

$$= \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$$

$$\frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3} = 0 \text{ при } 6x^2+2=0$$

$$6x^2 = -2$$

$$x^2 =$$

-3 не существует

$f''(x) = 0$ не существует,

значит нет точек перегиба

$f''(x) < 0$

$\frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3} < 0 \quad \vdots\, x \neq \pm 1$

$\frac{2(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} < 0$

$2(3x^2+1) > 0$ всегда, т. к. x^2 всегда положителен

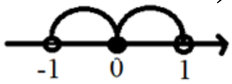
$(x^2-1)^3 < 0$

$x^2 - 1 < 0$

$x^2 < 1$

$|x| < 1$

1) $x < 1, x \geq 0$ 2) $x > -1, x < 0$

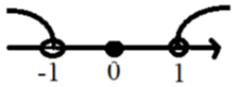
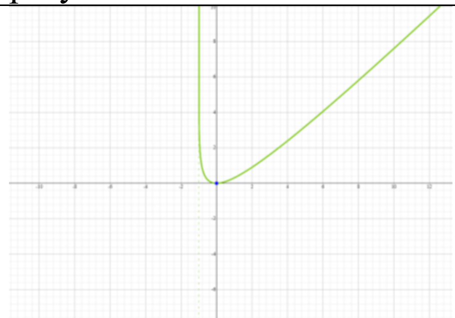
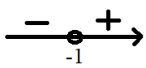


$x \in (-1; 1)$ – функция вогнута.

$f''(x) > 0$

$\frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3} > 0 \quad \vdots\, x \neq \pm 1$

$2(3x^2+1) > 0$ всегда, т. к. x^2 всегда положителен

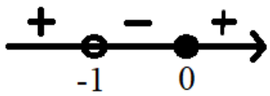
	$(x^2-1)^3>0$ $\lvert x\rvert>1$ 1) $x>1, x\geq 0$ 2) $x<-1, x<0$  $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ – функция выпукла.	
26.	Провести полное исследование и построить графики данных функций: $y=x-\ln(x+1)$	Построить график, используя полученные результаты
	Найти область определения функции, исследовать её поведение на границах этой области:	
	Подробное решение: Область определения функции (ООФ): аргумент логарифма может принимать только положительные значения: $f(x)=\ln(x), x>0$ $x+1>0$ $x+1=0$ $x=-1$  ООФ: (-1; +∞) Исследуем поведение функции на границах: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln(x+1))=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)=$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)=\left[\frac{-1}{+\infty}\right]=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-1+0}(x-\ln(x+1))=[-1-(-\infty)]=+\infty$, по формуле a-(-∞)=+∞, a€R	
	Найти точки разрыва и классифицировать их с помощью односторонних пределов:	
	Подробное решение: $f(x)$ не существует при x=-1 – точка разрыва $\lim\limits_{x\to-1}(x-\ln(x+1))=+\infty$ x=-1 – точка разрыва II рода	
	Исследовать периодичность, чётность (нечётность):	
	Подробное решение: $f(x)=(x-\ln(x+1))$ $f(-x)=(-x-\ln(-x+1))$	

$f(x) \neq f(-x)$ значит функция ни чётная, ни нечётная
Функция непериодична.

Найти точки пересечения графика с осями координат и интервалы знакопостоянства функции:

Подробное решение:
Пересечение с осью OY:
$x = 0$: $y = 0 - \ln 1 = 0$
Пересечение с осью OX
$y = 0$: $x - \ln(x+1) = 0$
$x = 0$

Определим интервалы знакопостоянства:
Корни $x = 0$ и $x \neq -1$



$f(x) > 0$ при
$[0; +\infty)$(на $(-\infty; -1)$не существует)
$f(x) < 0$ при $(-1; 0]$

Найти асимптоты:

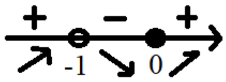
Подробное решение:
По уравнению асимптот $\lim\limits_{x\to\infty} kx + b - f(x)$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x - \ln(x+1)}{x} = 1$$
$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - kx$$
$$b = \lim_{x\to\infty} (x - \ln(x+1) - x) =$$
$$= \lim_{x\to\infty} (-1) * \ln(x+1) = -\infty$$

Следовательно, наклонные асимптоты отсутствуют. Отсюда точки, определяющие границы:
$\lim\limits_{x\to -1} (x - \ln(x+1)) = +\infty$, $x = -1$ – вертикальная асимптота

Найти точки экстремума и интервалы монотонности:

Подробное решение:
По формуле $(U \pm V)' = U' \pm V'$, x’=1,
$(\ln \mathrm{u})' = \frac{1}{u}$

	$f'(x) = (x - \ln(x+1))' = x' - (\ln(x+1))' =$ $= 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$ $f'(x) = 0$ при $x = 0$ и $x \neq -1$  $f'^{(x)} > 0$ при $[0; +\infty)$ – функция возрастает (на $(-\infty; -1)$не существует); $f'(x) < 0$ при $(-1; 0]$ – функция убывает. Согласно графику, в точке $x = 0$ функция меняет знак, $x = 0$ – точка минимума	
	Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости:	
	Подробное решение: По формулам $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}, (U \pm V)' = U' \pm V'$, x’=1, $C' = 0$ $f''(x) = \frac{x}{x+1} = \frac{x'(x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2} =$ $= \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$ $\frac{1}{(x+1)^2} = 0$ $1 \neq 0$ нет корней, функция выпуклая	

Бланк выполнения задания 3

<table>
<tr><th>№ п/п</th><th>Задача</th><th>Ответ</th></tr>
<tr><td rowspan="5">1.</td><td>Найти заданные неопределенные интегралы:</td><td></td></tr>
<tr><td>Условие задачи:
а)$\int \frac{\sin x}{1-\cos x} dx$</td><td rowspan="2">$\ln\lvert 1-\cos x\rvert + C$</td></tr>
<tr><td>Подробное решение:
Подставим $dx = \frac{1}{t'} * dt$, где
$t = 1 - \cos x$ и $t = \sin x$
$$\int \frac{\sin x}{1-\cos x} dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos x} * \frac{1}{\sin x} dt = \int \frac{1}{1-\cos x} dt$$
Сделаем замену $1 - \cos x = t$
$$\int \frac{1}{t} dt = \ln\lvert t\rvert$$
Сделаем обратную замену $t = 1 - \cos x$
$$\ln\lvert 1-\cos x\rvert + C, C€R$$</td></tr>
<tr><td>Условие задачи:
б)$\int \frac{4x+31}{2x^2+11x+12} dx$</td><td rowspan="2">$-3\ln\lvert x+4\rvert +$
$+5\ln\lvert 2x+3\rvert +$
$+C$</td></tr>
<tr><td>Подробное решение:
$$\int \frac{4x+31}{2x^2+11x+12} dx = \int \frac{4x+31}{2x^2+8x+3x+12} dx =$$
$$= \int \frac{4x+31}{2x(x+4)+3(x+4)} dx = \int \frac{4x+31}{(x+4)(2x+3)} dx$$
Сделаем действие, обратное приведению к одному знаменателю:
По формуле $\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
$$\frac{4x+31}{(x+4)(2x+3)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{2x+3}$$
$$4x+31 = A(2x+3) + B(x+4)$$
$$4x+31 = A2x + 3A + Bx + 4B$$
A: $2x + 3 = 0$
$x = -\frac{3}{2}$
$4 * -\frac{3}{2} + 31 = A * \left(-\frac{3*2}{2}\right) + 3A + B * \left(-\frac{3}{2}\right) + 4B$
$-6 + 31 = -3\mathrm{A} + 3\mathrm{A} - \frac{3}{2}\mathrm{B} + 4\mathrm{B}$
$25 = \frac{5}{2}\mathrm{B}$
$\mathrm{B} = 10$</td></tr>
</table>

	$B: x+4=0$ $x=-4$ $4*-4+31=A2*(-4)+3A+B*(-4)+4B$ $15=-8\text{A}+3\text{A}-4\text{B}+4\text{B}$ $15=-5A$ $A=-3$ $$\int\frac{4x+31}{(x+4)(2x+3)}dx=\int\frac{-3}{x+4}dx+\int\frac{10}{2x+3}dx=$$ По формуле $\int\frac{a}{x}dx=a*\ln\lvert x\rvert$ $$=-3\int\frac{1}{x+4}dx+10\int\frac{1}{2x+3}dx=$$ Сделаем замену $x+4=t$ и $2x+3=u$ $$=-3\int\frac{1}{t}dt+5\int\frac{1}{u}du=$$ По формуле $\int\frac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert$, делаем обратную замену $t=x+4$ и $u=2x+3$ $$=-3\ln\lvert x+4\rvert+5\ln\lvert 2x+3\rvert+C, C\epsilon R$$	
	Условие задачи: в)$\int(2-x)\sin x\,dx$	$-2\cos x+$ $+x\cos x-\sin x$ $+C$
	Подробное решение: $$\int(2-x)\sin x\,dx=\int 2\sin x-x\,sin\,x\,dx=$$ По формуле $\int f(x)\pm g(x)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$ $$=\int 2\sin x\,dx-\int x\,sin\,x\,\,dx=$$ По формуле $\int a*f(x)dx=a*\int f(x)dx, a\epsilon R$ $$=2\int\sin x\,dx-\int x\,sin\,x\,\,dx=$$ По формуле $\int\sin x\,dx=\,-\cos x$ $$=-2\cos x-\int x\,sin\,x\,dx=$$ По формуле $\int u\,dv=uv-\int u\,du$ $$=-2\cos x-\left(x(-\cos x)-\int -cos\,x\,dx\right)=$$ По формуле $\int -f(x)dx=-\int f(x)\,dx$ и $\int\cos x\,dx=\sin x$ $$=-2\cos x-(-x\cos x+\sin x)=$$ $$=-2\cos x+x\cos x-\sin x+C, C\epsilon R$$	
	Условие задачи: г)$\int\frac{\cos x}{1+\cos x}dx$	$x-tg\dfrac{x}{2}+C$

	Подробное решение: $$\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx = \int \frac{\cos x}{\cos x} - \frac{1}{1+\cos x}dx =$$ По формуле $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ $$= \int 1\, dx - \frac{1}{1+\cos x}dx =$$ Используем формулу понижения степени:$cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos x}{2}$ $$= x - \int \frac{1}{2cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}dx =$$ Сделаем замену $u = \frac{x}{2}$, x=2u, dx=2du, воспользуемся табличным значением $tg\; u = \frac{1}{cos^2 u}$ и сделаем обратную замену $u = \frac{x}{2}$, x=2u $$= x - tg\frac{x}{2} + C, C\epsilon R$$	