Задача № 19

Определить главные напряжения и направления главных напряжении, если напряженное состояние в точке нагруженного тела задана тензором напряжений.

$\sigma_{xx} = 20$ МПа

$\sigma_{\text{yy}} = 100$ МПа

$\sigma_{zz} = 0$ МПа

$\tau_{xy} = 20$ МПа

$\tau_{xz} = 10$ МПа

$\tau_{yz} = 20$ МПа

Решение:

1. В соответствии с уравнением (10.14) [1] определяем инварианты заданного напряженного состояния:

$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{\text{yy}} + \sigma_{zz} = 20 + 100 + 0 = 120$ МПа

$I_2 = \sigma_{xx}\,\sigma_{\text{yy}} + \sigma_{\text{yy}}\,\sigma_{zz} + \sigma_{xx}\,\sigma_{zz} - {\tau_{xy}}^2 - {\tau_{yz}}^2 - {\tau_{zx}}^2$

$I_2 = 20 \cdot 100 + 100 \cdot 0 + 20 \cdot 0 - 20^2 - 20^2 - 10^{2=}1100$ Мпа

$I_3 = \sigma_{xx}\,\sigma_{\text{yy}}\,\sigma_{zz} - \sigma_{zz}\,{\tau_{xy}}^2 - \sigma_{xx}\,{\tau_{yz}}^2 - \sigma_{zz}\,{\tau_{zx}}^2 + 2\tau_{xy}\,\tau_{yz}\,\tau_{zx}$

$I_3 = 20 \cdot 100 \cdot 0 - 0 \cdot 20^2 - 20 \cdot 20^2 - 100 \cdot 10^2 + 2 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 20 = -10000$ Мпа

2. Определяем коэффициенты уравнения (10.14) [1].

Если сделать замену неизвестного $\text{S} = \sigma = \text{x} + \frac{1}{3}I_1$, то из (10.14) получим приведенное уравнение:

$x^3 + px + q = 0;$

где $p = I_2 - \frac{1}{3}{I_1}^2;$

$$q = -\frac{2}{27}{I_1}^3 + \frac{1}{3}I_1 I_2 - I_3$$

$$p = 1100 - \frac{1}{3}\,120^2 = -3700$$

$$q = -\frac{2 \cdot 120^3}{27} + \frac{120 \cdot 1100}{3} - 10000 = -74$$

Определяем дискриминант приведенного уравнения:

$$\Delta = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \left(-\frac{3700}{3}\right)^3 + \left(-\frac{74000}{2}\right)^2 = -507.04 \cdot 10^6 < 0$$

Т.к. дискриминант отрицателен, значит все корни приведенного уравнения вещественные.

3. Вычисляем величины главных напряжений.

Для решения приведенного уравнения применим формулу Кардано:

$$x_1 = 2\sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|}\cos\frac{\varphi}{3}$$

$$x_2 = 2\sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$x_3 = 2\sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)$$

где $\cos\varphi = -\frac{q}{2\sqrt{\left|\frac{p^3}{27}\right|}}$

$$\cos\varphi = -\frac{-74000}{2\sqrt{\left|\frac{(-3700)^3}{27}\right|}} = 0{,}854242$$

$$\varphi = 31{,}32388°$$

$$\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) = \cos(10{,}44°) = 0{,}983441$$

$$\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right) = \cos(130{,}44°) = -0{,}64867$$

$$\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right) = \cos(250{,}44°) = -0{,}33477$$

$$x_1 = 2\sqrt{\left|\frac{-3700}{3}\right|}\cdot 0{,}983441 = 69{,}08$$

$$x_2 = 2\sqrt{\left|\frac{-3700}{3}\right|}\cdot(-0{,}64867) = -45{,}56$$

$$x_3 = 2\sqrt{\left|\frac{-3700}{3}\right|}\cdot(-0{,}33477) = -23{,}51$$

Окончательно получаем:

$$\sigma_1 = 69{,}08 + \frac{120}{3} = 109{,}08 \text{ Мпа}$$

$$\sigma_2 = -45{,}56 + \frac{120}{3} = 5{,}56 \text{ МПа}$$

$$\sigma_3 = -23{,}51 + \frac{120}{3} = 16{,}49 \text{ Мпа}$$

Проверка правильности вычислений главных напряжений: так как I_1, I_2, I_3 – инварианты, значит их значения постоянны. Ранее били получены их значения в данной системе координат:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 109{,}08 - 5{,}56 + 16{,}49 = 120 \text{ МП}$$

$I_2 = \sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_1\,\sigma_3 + \sigma_2\,\sigma_3 = 109{,}08(-5{,}56) + 109{,}08(16{,}49) + 16{,}49(-5{,}56) = 1000$ Мпа

$I_3 = \sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3 = 109{,}08(-5{,}56)16{,}49 = -10000$ Мпа

Результаты вычислений I_1, I_2, I_3 в рамках допустимых отклонений совпадают с результатами, полученными в п. 1.

4. Определяем направляющие косинусы главных площадок. Система уравнений для определения l_1, m_1, n_1 имеет следующий вид (10.11) [1]:

$$(\sigma_{xx} - S)\cdot l + \tau_{xy}\cdot m + \tau_{xz}\cdot n = 0$$

$$\tau_{xy}\cdot l + (\sigma_{yy} - S)\cdot m + \tau_{zy}\cdot n = 0$$

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

$$(20 - 109{,}08)l_1 + 20m_1 + 10n_1 = 0$$

$$20l_1 + (100 - 109{,}08)m_1 + 20n_1 = 0$$

$${l_1}^2 + {m_1}^2 + {n_1}^2 = 1$$

Решение уравнения:

$l_1 = 0{,}2357$

$m_1 = 0{,}9518$

$n_1 = 0{,}1964$

Условия проверки выполняются:

$$(0{,}2357)^2 + (0{,}9518)^2 + (0{,}1964)^2 \approx 1$$

Система уравнений для определения l_2, m_2, n_2 имеет следующий вид:

$$(20 + 5{,}56)l_2 + 20m_2 + 10n_2 = 0$$

$$20l_2 + (100 - 5{,}56)m_2 + 20n_2 = 0$$

$${l_2}^2 + {m_2}^2 + {n_2}^2 = 1$$

Решение уравнения:

$l_2 = -0{,}2720$

$m_2 = -0{,}1291$

$n_2 = 0{,}9536$

Условия проверки выполняются:

$$(-0{,}2720)^2 + (-0{,}1291)^2 + (0{,}9536)^2 \approx 1$$

Система уравнений для определения l_3, m_3, n_3 имеет следующий вид:

$$(20 - 16{,}49)l_3 + 20m_3 + 10n_3 = 0$$

$$20l_3 + (100 - 16{,}49)m_2 + 20n_3 = 0$$

$l_3{}^2 + m_3{}^2 + n_3{}^2 = 1$

Решение уравнения:

$l_3 = 0{,}9328$

$m_3 = -0{,}2783$

$n_3 = 0{,}2291$

Условия проверки выполняются:

$(0{,}9328)^2 + (-0{,}2783)^2 + (0{,}2291)^2 \approx 1$

Список литературы.

1. Саргсян А.Е. Сопротивление материалов, теории упругости и пластичности. Основы теории с примерами расчетов. - Учебник для вузов. - 2-е ИЗД., испр. и доп. - М.: Высшая школа, 2000. - 286 с.: ил.

Задача № 20

На прямоугольную пластину шириной b, длиной l=2b и толщиной в единицу действуют по кромкам внешние силы, распределенные по ее толщине. Эти силы создают в пластине обобщенное плоское напряженное состояние.

Указаны оси координат и задано выражение функции напряжении $\varphi = ф_1 - ф_2$.

Требуется:

1. Проверить возможность существования такой функции напряжений.

2. По функции напряжений найти выражения компонентов напряжений.

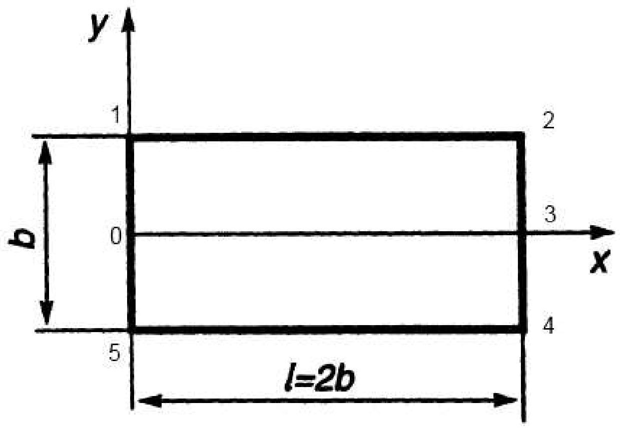
3. Выяснить характер распределенных по кромкам внешних сил, при действии которых имеет место найденная система напряжений, и построить эпюры напряжений.

4. По полученным эпюрам напряжении произвести проверку равновесия пластины.

$ф_1 = mb^2y(x + y)$

$ф_2 = ny^2(3x^2 + y^2)$

$\frac{m}{n} = -2$



Решение:

1. Проверим существование такой функции напряжений:

$\varphi = mb^2y(x + y) + ny^2(3x^2 + y^2)$

$\varphi = mb^2xy + mb^2y^2 + 3nx^2y^2 - ny^4$

$\varphi = -2nb^2xy - 2mb^2y^2 + 3nx^2y^2 - ny^4$

Для выполнения проверки существования заданной функции напряжений выполним ее дифференцирование:

$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -2nb^2y + 6nxy^2$

$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 6ny^2$

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3} = 0$$

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -4nb^2x - 4nb^2y + 6nx^2y - 4ny^3$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -4nb^2 + 6nx^2 - 12ny^2$$

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3} = -24ny$$

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} = -24n$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = -2nb^2 + 12nxy$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2\partial y} = 12ny$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2\partial y^2} = 12n$$

Подставим четвертые производные в бигармоническое уравнение (10.32) [1]:

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} = 0\,,$$

видим, что оно удовлетворяется: $0 + 2\cdot 12n - 24n = 0$.

Следовательно, напряженное состояние пластины, выраженное заданной функцией напряжений, возможно.

2. По функции напряжений найдем выражения компонентов напряжений. Компоненты напряжений, действующих по кромкам пластин, равны:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 6nx^2 - 4nb^2 - 12ny^2$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 6ny^2$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = 2nb^2 - 12nxy$$

3. Выясним характер распределенных по кромкам пластины внешних сил, под действием которых имеет место данная система напряжений и построим эпюры напряжений. Используя функциональные компоненты напряжений в пластине, построим соответствующие эпюры напряжений по контуру пластины на каждой ее боковой стороне.

Сторона 5-0-1 (x=0; $-\frac{b}{2} \le y \le \frac{b}{2}$)

На этой грани действуют напряжения:

$\sigma_{xx} = -4nb^2 - 12ny^2$

$\tau_{xy} = 2nb^2$

$\boldsymbol{y = -\frac{b}{2}}$

$\sigma_{xx} = -4nb^2 - 3nb^2 = -7nb^2$

$\tau_{xy} = 2nb^2$

y = 0

$\sigma_{xx} = -4nb^2$

$\tau_{xy} = 2nb^2$

$\boldsymbol{y = \frac{b}{2}}$

$\sigma_{xx} = -4nb^2 - 3nb^2 = -7nb^2$

$\tau_{xy} = 2nb^2$

Сторона 1-2 (0$\leq \boldsymbol{x \leq 2b}$; $\boldsymbol{y = \frac{b}{2}}$)

На этой грани действуют напряжения:

$\sigma_{yy} = \frac{3}{2}nb^2$

$\tau_{xy} = 2nb^2 - 6nbx$

x = 0

$\sigma_{yy} = \frac{3}{2}nb^2$

$\tau_{xy} = 2nb^2$

x = 2b

$\sigma_{yy} = \frac{3}{2}nb^2$

$\tau_{xy} = 2nb^2 - 12nb^2 = -10nb^2$

Сторона 2-3-4 (x=2b; $\boldsymbol{-\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}}$)

На этой грани действуют напряжения:

$\sigma_{xx} = 20nb^2 - 12ny^2$

$\tau_{xy} = 2nb^2 - 24nby$

$\boldsymbol{y = -\frac{b}{2}}$

$\sigma_{xx} = 20nb^2 - 3nb^2 = 17nb^2$

$\tau_{xy} = 2nb^2 + 12nb^2 = 14nb^2$

y = 0

$\sigma_{xx} = 20nb^2$

$\tau_{xy} = 2nb^2$

$\boldsymbol{y = \frac{b}{2}}$

$\sigma_{xx} = 20nb^2 - 3nb^2 = 17nb^2$

$\tau_{xy} = 2nb^2 - 12nb^2 = -10nb^2$

Сторона 4-5 (0$\leq$ $\boldsymbol{x \leq 2b}$; $\boldsymbol{y = -\frac{b}{2}}$)

На этой грани действуют напряжения:

$\sigma_{yy} = \frac{3}{2}nb^2$

$\tau_{xy} = 2nb^2 + 6nbx$

x = 0

$\sigma_{yy} = \frac{3}{2}nb^2$

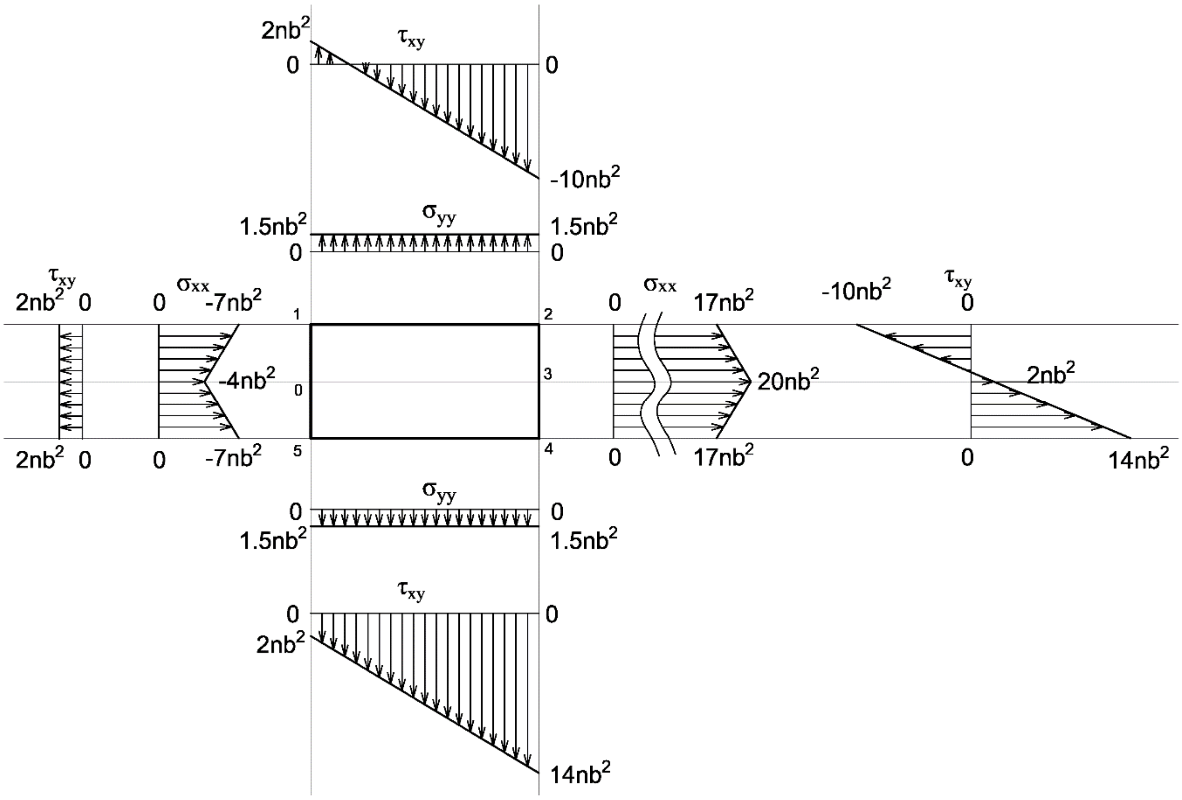
$\tau_{xy} = 2nb^2$

x = 2b

$\sigma_{yy} = \frac{3}{2}nb^2$

$\tau_{xy} = 2nb^2 + 12nb^2 = 14nb^2$

По полученным результатам строим эпюры σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy}



4. По полученным эпюрам производим проверку равновесия пластины. Для этого найдем равнодействующие внешних сил, действующих по кромкам пластины.

$$R_x^{5-1} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sigma_{xx}\, dy = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (-4nb^2 - 12ny^2)\, dy = -5nb^3$$

$$R_y^{5-1} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \tau_{xy}\, dy = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} 2nb^2\, dy = 2nb^2$$

$$R_x^{1-2} = \int_{0}^{2b} \tau_{xy}\, dx = \int_{0}^{2b} (2nb^2 - 6nbx)\, dx = -8nb^3$$

$$R_y^{1-2} = \int_{0}^{2b} \sigma_{yy}\, dx = \int_{0}^{2b} (1{,}5nb^2)\, dx = 3nb^3$$

$$R_x^{2-4} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sigma_{xx}\, dy = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (20nb^2 - 12ny^2)\, dy = 19nb^3$$

$$R_y^{2-4} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \tau_{xy}\, dy = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (2nb^2 - 24nby)\, dy = 2nb^3$$

$$R_x^{4-5} = \int_0^{2b} \tau_{xy}\, dx = \int_0^{2b} (2nb^2 + 6nbx)\, dx = 16nb^3$$

$$R_y^{4-5} = \int_0^{2b} \sigma_{xx}\, dx = \int_0^{2b} (1{,}5nb^2)\, dx = 3nb^3$$

Далее определяем статические моменты площадей эпюры нормальных напряжений, действующих по краям пластины, относительно координатных осей X, Y, Z, с целью вычисления координат точек приложения равнодействующих сил от нормальных напряжений:

$$S_x^{5-1} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sigma_{xx}\, y\, dy = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (-4nb^2y - 12ny^3)\, dy = 0$$

$$S_y^{1-2} = \int_0^{2b} \sigma_{yy}\, x\, dx = \int_0^{2b} 1{,}5nb^2x\, dx = 3nb^4$$

$$S_x^{2-4} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sigma_{xx}\, y\, dy = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (20nb^2 - 12ny^3)\, dy = 0$$

$$S_y^{4-5} = \int_0^{2b} \sigma_{yy}\, xdx = \int_0^{2b} 1{,}5nb^2x\, dx = 3nb^4$$

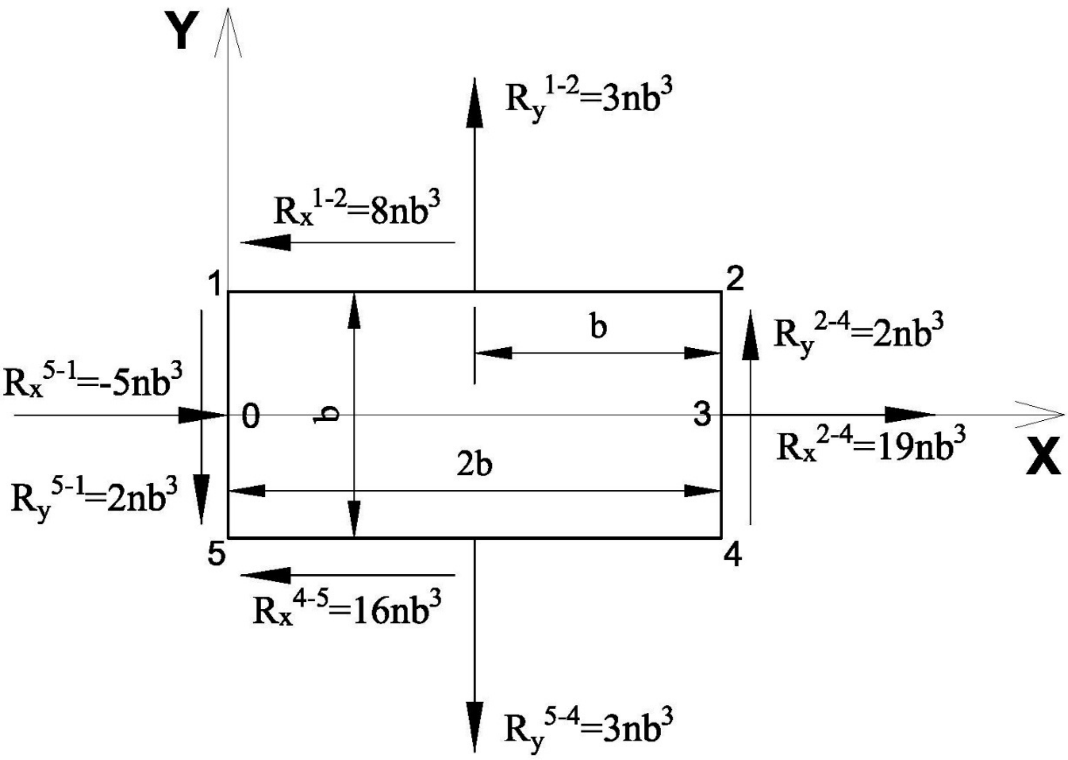
Расстояние от точек действия результирующих нормальных сил до соответствующих координатных осей принимают следующие значения:

$$y^{5-1} = \frac{S_x^{5-1}}{R_x^{5-1}} = \frac{0}{-5nb^3} = 0$$

$$x^{1-2} = \frac{S_y^{1-2}}{R_y^{1-2}} = \frac{3nb^4}{3nb^3} = b$$

$$y^{2-4} = \frac{S_x^{2-4}}{R_x^{2-4}} = \frac{0}{19nb^3} = 0$$

$$x^{4-5} = \frac{S_y^{4-5}}{R_y^{4-5}} = \frac{3nb^4}{3nb^3} = b$$



Проверим условия нахождения пластины в равновесном состоянии:

$$\sum x = R_x^{5-1} - R_x^{1-2} + R_x^{2-4} - R_x^{4-5} = (5 - 8 + 19 - 16)nb^3 = 0$$

$$\sum y = R_y^{1-2} - R_y^{4-5} + R_y^{2-4} + R_y^{5-1} = (3 - 3 + 2 - 2)nb^3 = 0$$

$$\sum M(2) = R_y^{1-2} \cdot b - R_y^{4-5} \cdot b - R_y^{5-1} \cdot 2b - R_x^{5-1} \cdot \frac{b}{2} + R_x^{4-5} \cdot b - R_x^{2-4} \cdot \frac{b}{2}$$

$$\sum M(2) = 3nb^4 - 3nb^4 - 4nb^4 - \frac{5}{2}nb^4 + 16nb^4 - \frac{19}{2}nb^4 = 0$$

Уравнения равновесия удовлетворяются, следовательно, пластина находится в равновесном состоянии.

Список литературы:

1. Саргсян А.Е. Сопротивление материалов, теории упругости и пластичности. Основы теории с примерами расчетов. – Учебник для вузов. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Высшая школа, 2000. – 286 с.: ил.