Задача № 20

На прямоугольную пластину шириной b, длиной l=2b и толщиной в единицу действуют по кромкам внешние силы, распределенные по ее толщине. Эти силы создают в пластине обобщенное плоское напряженное состояние.

Указаны оси координат и задано выражение функции напряжении $\varphi = ф_1 - ф_2$.

Требуется:

1. Проверить возможность существования такой функции напряжений.

2. По функции напряжений найти выражения компонентов напряжений.

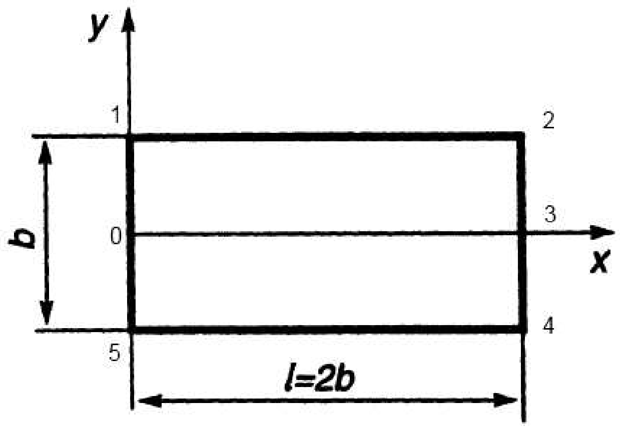
3. Выяснить характер распределенных по кромкам внешних сил, при действии которых имеет место найденная система напряжений, и построить эпюры напряжений.

4. По полученным эпюрам напряжении произвести проверку равновесия пластины.

$ф_1 = mb^2y(x+y)$

$ф_2 = ny^2(3x^2+y^2)$

$\frac{m}{n} = -2$



Решение:

1. Проверим существование такой функции напряжений:

$\varphi = mb^2y(x+y) + ny^2(3x^2+y^2)$

$\varphi = mb^2xy + mb^2y^2 + 3nx^2y^2 - ny^4$

$\varphi = -2nb^2xy - 2mb^2y^2 + 3nx^2y^2 - ny^4$

Для выполнения проверки существования заданной функции напряжений выполним ее дифференцирование:

$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -2nb^2y + 6nxy^2$

$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 6ny^2$

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = 0$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -4nb^2x - 4nb^2y + 6nx^2y - 4ny^3$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -4nb^2 + 6nx^2 - 12ny^2$$

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} = -24ny$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = -24n$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -2nb^2 + 12nxy$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial y} = 12ny$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = 12n$$

Подставим четвертые производные в бигармоническое уравнение (10.32) [1]:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0\,,$$

видим, что оно удовлетворяется: $0 + 2 \cdot 12n - 24n = 0$.

Следовательно, напряженное состояние пластины, выраженное заданной функцией напряжений, возможно.

2. По функции напряжений найдем выражения компонентов напряжений. Компоненты напряжений, действующих по кромкам пластин, равны:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 6nx^2 - 4nb^2 - 12ny^2$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 6ny^2$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 2nb^2 - 12nxy$$

3. Выясним характер распределенных по кромкам пластины внешних сил, под действием которых имеет место данная система напряжений и построим эпюры напряжений. Используя функциональные компоненты напряжений в пластине, построим соответствующие эпюры напряжений по контуру пластины на каждой ее боковой стороне.

Сторона 5-0-1 (x=0; $-\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$)

На этой грани действуют напряжения:

$\sigma_{xx} = -4nb^2 - 12ny^2$

$\tau_{xy} = 2nb^2$

$\boldsymbol{y = -\frac{b}{2}}$

$\sigma_{xx} = -4nb^2 - 3nb^2 = -7nb^2$

$\tau_{xy} = 2nb^2$

y = 0

$\sigma_{xx} = -4nb^2$

$\tau_{xy} = 2nb^2$

$\boldsymbol{y = \frac{b}{2}}$

$\sigma_{xx} = -4nb^2 - 3nb^2 = -7nb^2$

$\tau_{xy} = 2nb^2$

Сторона 1-2 (0$\boldsymbol{\leq x \leq 2b}$; $\boldsymbol{y = \frac{b}{2}}$)

На этой грани действуют напряжения:

$\sigma_{yy} = \frac{3}{2}nb^2$

$\tau_{xy} = 2nb^2 - 6nbx$

x = 0

$\sigma_{yy} = \frac{3}{2}nb^2$

$\tau_{xy} = 2nb^2$

x = 2b

$\sigma_{yy} = \frac{3}{2}nb^2$

$\tau_{xy} = 2nb^2 - 12nb^2 = -10nb^2$

Сторона 2-3-4 (x=2b; $\boldsymbol{-\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}}$)

На этой грани действуют напряжения:

$\sigma_{xx} = 20nb^2 - 12ny^2$

$\tau_{xy} = 2nb^2 - 24nby$

$\boldsymbol{y = -\frac{b}{2}}$

$\sigma_{xx} = 20nb^2 - 3nb^2 = 17nb^2$

$\tau_{xy} = 2nb^2 + 12nb^2 = 14nb^2$

y = 0

$\sigma_{xx} = 20nb^2$

$\tau_{xy} = 2nb^2$

$\boldsymbol{y = \frac{b}{2}}$

$\sigma_{xx} = 20nb^2 - 3nb^2 = 17nb^2$

$\tau_{xy} = 2nb^2 - 12nb^2 = -10nb^2$

Сторона 4-5 (0$\boldsymbol{\leq x \leq 2b}$; $\boldsymbol{y = -\frac{b}{2}}$)

На этой грани действуют напряжения:

$\sigma_{yy} = \frac{3}{2}nb^2$

$\tau_{xy} = 2nb^2 + 6nbx$

x = 0

$\sigma_{yy} = \frac{3}{2}nb^2$

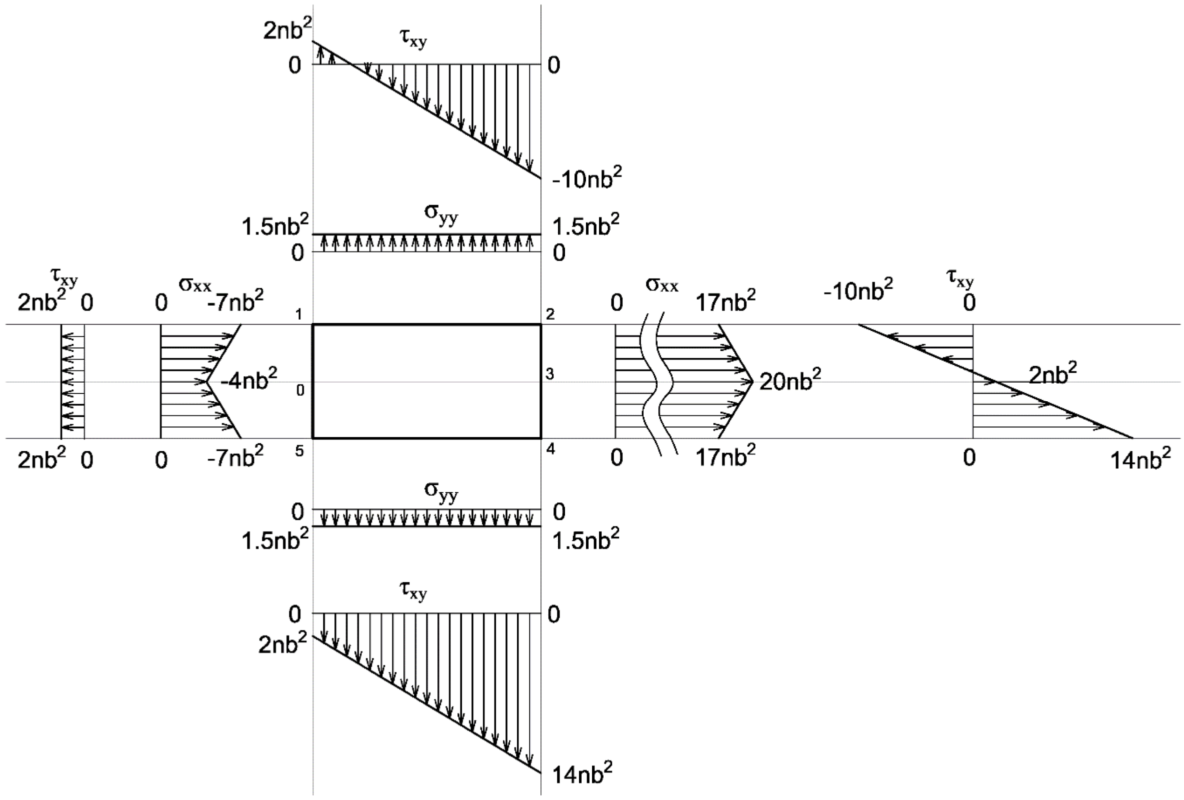
$\tau_{xy} = 2nb^2$

x = 2b

$\sigma_{yy} = \frac{3}{2}nb^2$

$\tau_{xy} = 2nb^2 + 12nb^2 = 14nb^2$

По полученным результатам строим эпюры σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy}



4. По полученным эпюрам производим проверку равновесия пластины. Для этого найдем равнодействующие внешних сил, действующих по кромкам пластины.

$$R_x^{5-1} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sigma_{xx}\, dy = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (-4nb^2 - 12ny^2)\, dy = -5nb^3$$

$$R_y^{5-1} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \tau_{xy}\, dy = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} 2nb^2\, dy = 2nb^2$$

$$R_x^{1-2} = \int_{0}^{2b} \tau_{xy}\, dx = \int_{0}^{2b} (2nb^2 - 6nbx)\, dx = -8nb^3$$

$$R_y^{1-2} = \int_{0}^{2b} \sigma_{yy}\, dx = \int_{0}^{2b} (1{,}5nb^2)\, dx = 3nb^3$$

$$R_x^{2-4} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sigma_{xx}\, dy = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (20nb^2 - 12ny^2)\, dy = 19nb^3$$

$$R_y^{2-4} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \tau_{xy}\, dy = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (2nb^2 - 24nby)\, dy = 2nb^3$$

$$R_x^{4-5} = \int_0^{2b} \tau_{xy}\, dx = \int_0^{2b} (2nb^2 + 6nbx)\, dx = 16nb^3$$

$$R_y^{4-5} = \int_0^{2b} \sigma_{xx}\, dx = \int_0^{2b} (1{,}5nb^2)\, dx = 3nb^3$$

Далее определяем статические моменты площадей эпюры нормальных напряжений, действующих по краям пластины, относительно координатных осей X, Y, Z, с целью вычисления координат точек приложения равнодействующих сил от нормальных напряжений:

$$S_x^{5-1} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sigma_{xx}\, y\, dy = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (-4nb^2y - 12ny^3)\, dy = 0$$

$$S_y^{1-2} = \int_0^{2b} \sigma_{yy}\, x\, dx = \int_0^{2b} 1{,}5nb^2x\, dx = 3nb^4$$

$$S_x^{2-4} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sigma_{xx}\, y\, dy = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (20nb^2 - 12ny^3)\, dy = 0$$

$$S_y^{4-5} = \int_0^{2b} \sigma_{yy}\, xdx = \int_0^{2b} 1{,}5nb^2x\, dx = 3nb^4$$

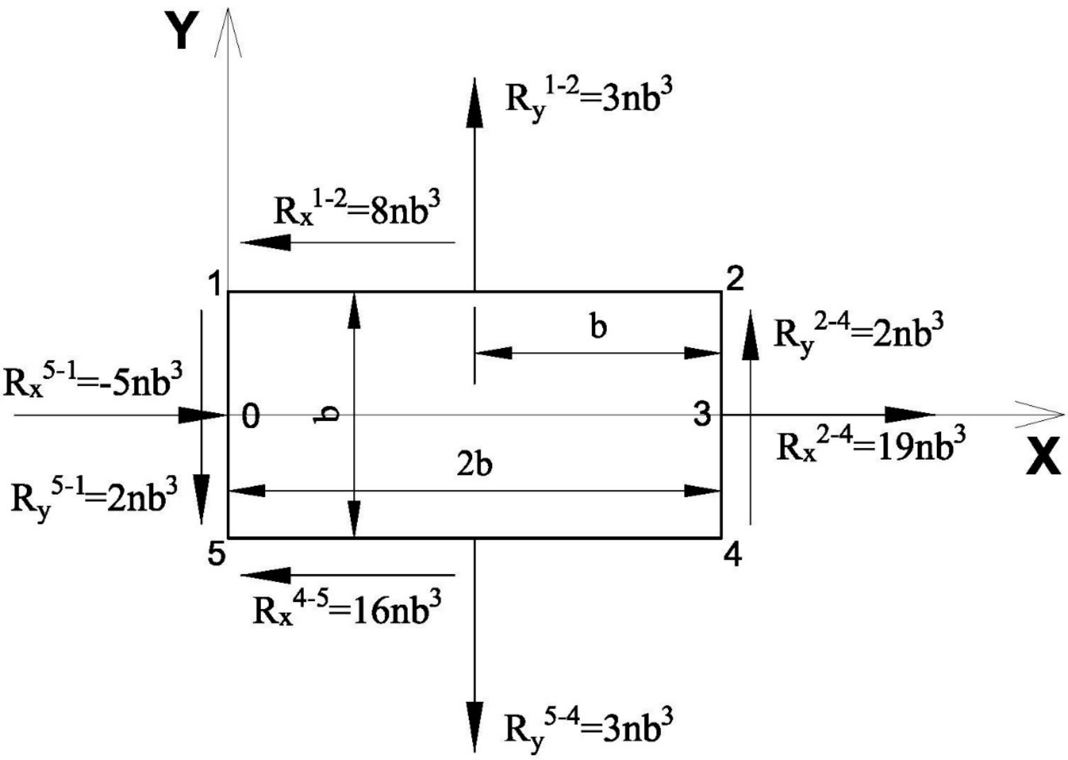
Расстояние от точек действия результирующих нормальных сил до соответствующих координатных осей принимают следующие значения:

$$y^{5-1} = \frac{S_x^{5-1}}{R_x^{5-1}} = \frac{0}{-5nb^3} = 0$$

$$x^{1-2} = \frac{S_y^{1-2}}{R_y^{1-2}} = \frac{3nb^4}{3nb^3} = b$$

$$y^{2-4} = \frac{S_x^{2-4}}{R_x^{2-4}} = \frac{0}{19nb^3} = 0$$

$$x^{4-5} = \frac{S_y^{4-5}}{R_y^{4-5}} = \frac{3nb^4}{3nb^3} = b$$



Проверим условия нахождения пластины в равновесном состоянии:

$$\sum x = R_x^{5-1} - R_x^{1-2} + R_x^{2-4} - R_x^{4-5} = (5 - 8 + 19 - 16)nb^3 = 0$$

$$\sum y = R_y^{1-2} - R_y^{4-5} + R_y^{2-4} + R_y^{5-1} = (3 - 3 + 2 - 2)nb^3 = 0$$

$$\sum M(2) = R_y^{1-2} \cdot b - R_y^{4-5} \cdot b - R_y^{5-1} \cdot 2b - R_x^{5-1} \cdot \frac{b}{2} + R_x^{4-5} \cdot b - R_x^{2-4} \cdot \frac{b}{2}$$

$$\sum M(2) = 3nb^4 - 3nb^4 - 4nb^4 - \frac{5}{2}nb^4 + 16nb^4 - \frac{19}{2}nb^4 = 0$$

Уравнения равновесия удовлетворяются, следовательно, пластина находится в равновесном состоянии.

Список литературы:

1. Саргсян А.Е. Сопротивление материалов, теории упругости и пластичности. Основы теории с примерами расчетов. – Учебник для вузов. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Высшая школа, 2000. – 286 с.: ил.