

Задача 2. Расчет плоской статически определимой фермы

$l=18$ м

$h=2,9$ м

$q=4$ кН/м

Найти:

- 1) провести кинематический анализ;
- 2) привести равномерно распределенную нагрузку, действующую на ферму, к узловой. Определить опорные реакции;
- 3) определить усилия во всех стержнях фермы аналитически;
- 4) выбрать по одному стержню верхнего и нижнего пояса, стойку и раскос с максимальными растягивающими или сжимающими усилиями и построить линии влияния усилий в выбранных стержнях;
- 5) загрузить линии влияния действующей нагрузкой и сравнить результаты с пунктом 3.
- 6) полагая, что заданная нагрузка может быть приложена к части фермы, определить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее усилия в выбранных стержнях при наиболее невыгодном нагружении и сравнить с усилиями при нагружении всей фермы.

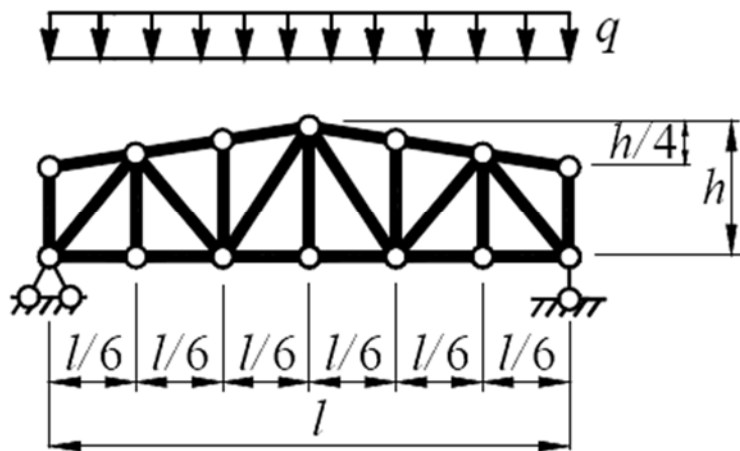


Рисунок 1 Расчетная схема

Решение

Перед тем как приступить к расчету данной трапецидальной фермы с раскосной решеткой пронумеруем узлы (Рисунок 2) и произведем вычисление тригонометрических функций от углов наклона стержней фермы:

$$\alpha_1 = \arctg((h_{7-8} - h_{1-2})/9) = 4,6^\circ$$

$$\alpha_2 = \arctg(3/(h_{1-2} + 3tg(\alpha_1))) = 51,1^\circ$$

$$\alpha_3 = \arctg(3/(h_{5-6} + 3tg(\alpha_1))) = 46,0^\circ$$

$$a = \frac{2,9 - 0,725}{tg(4,6^\circ)} \approx 27,03 \text{ м}$$

$$h_{3-4} = 2,9 \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot 0,725 = 2,42 \text{ м}$$

$$h_{4-5} = 2,66 \text{ м}$$

1. Кинематический анализ.

Число степеней свободы фермы определяем по формуле $W = 2Y - C$, где Y – число узлов фермы, C – число всех стержней фермы, включая опорные. Аналитическое условие геометрической неизменяемости $W \leq 0$.

Для заданной фермы

$$W = 2 \cdot 14 - 28 = 0 ,$$

значит, ферма статически определима и имеет минимально необходимое количество связей, чтобы считать ее геометрически неизменяемой.

Теперь проведем анализ правильности размещения связей. Наиболее просто это сделать, последовательно отбрасывая узлы с двумя стержнями, и если в результате останется шарнирный треугольник (простейшая геометрически неизменяемая система), то вся ферма геометрически неизменяема. Отбрасываем последовательно узлы 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 7, 10, 9, 12 с двумя стержнями и видим, что остается шарнирный треугольник 11–13–14. Геометрически неизменяемая ферма крепится к земле с помощью трех связей (две связи в узле 1 и одна связь в узле 13), оси которых не пересекаются в одной точке и не параллельны. Значит, вся система является геометрически неизменяемой.

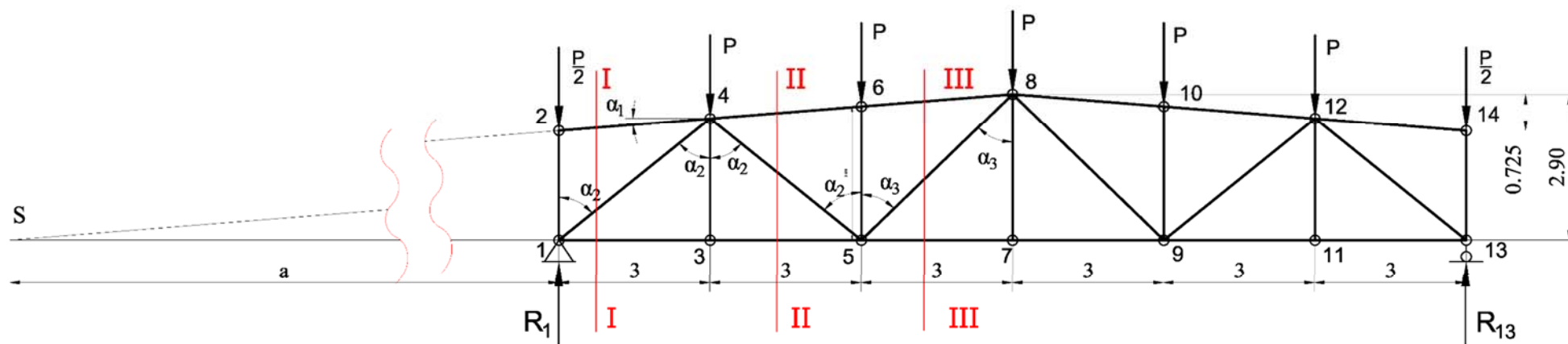


Рисунок 2 Расчетная схема

2. Приведение равномерно распределенной нагрузки к узловой.

Определение опорных реакций. Для дальнейших расчетов приведем равномерно-распределенную нагрузку q к узловой (Рисунок 2). Нагрузка P на промежуточные узлы (4, 6, 8, 10, 12) будет равна

$$P = q \cdot d = 4 \cdot 3 = 12 \text{ кН},$$

$$R_1 = R_{13} = \frac{6P}{2} = 3P = 36 \text{ кН}.$$

3. Определение усилий в стержнях фермы от внешней нагрузки аналитическим методом.

Узел 2.

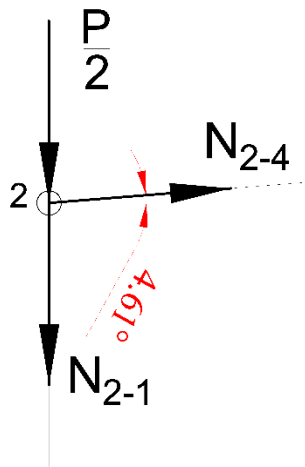


Рисунок 3 Узел 2

$$\sum y = 0$$

$$-0,5P - N_{2-1} + N_{2-4} \cdot \sin(\alpha_1) = 0 \quad \sum z = 0: N_{2-4} \cdot \cos(\alpha_1) = 0$$

$$N_{2-1} = -0,5P = -36 \text{ кН}$$

Сечение I-I

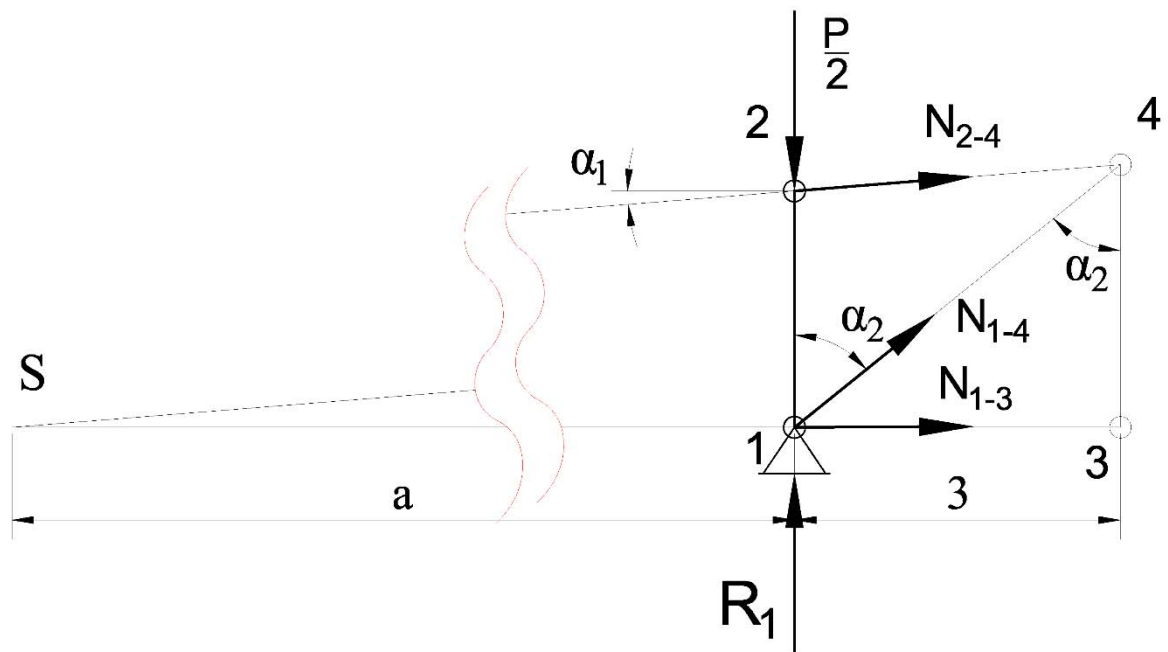


Рисунок 4 Сечение I-I

$$\sum M_S = 0$$

$$0,5P \cdot a - R_1 a - N_{1-4} \cdot a \cos(\alpha_2) = 0$$

$$N_{1-4} = \frac{0,5Pa - R_1 a}{a \cos(\alpha_2)} = \frac{6-36}{\cos(51.1)} = -47,82 \text{ кН}$$

$$\sum M_4 = 0$$

$$-0,5P \cdot 3 + R_1 \cdot 3 - N_{1-3} \cdot 2,4167 = 0$$

$$N_{1-3} = \frac{-6 \cdot 3 + 36 \cdot 3}{2,416} = 37,23 \text{ кН}$$

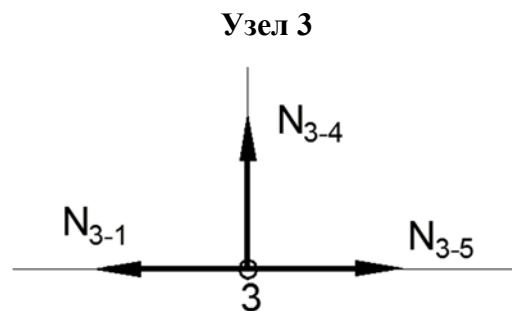


Рисунок 5 Узел 3

$$\sum y = 0$$

$$-N_{3-1} + N_{3-5} = 0$$

$$N_{3-5} = N_{3-1} = 37,23$$

$$\sum z = 0: N_{3-4} = 0$$

Сечение II- II

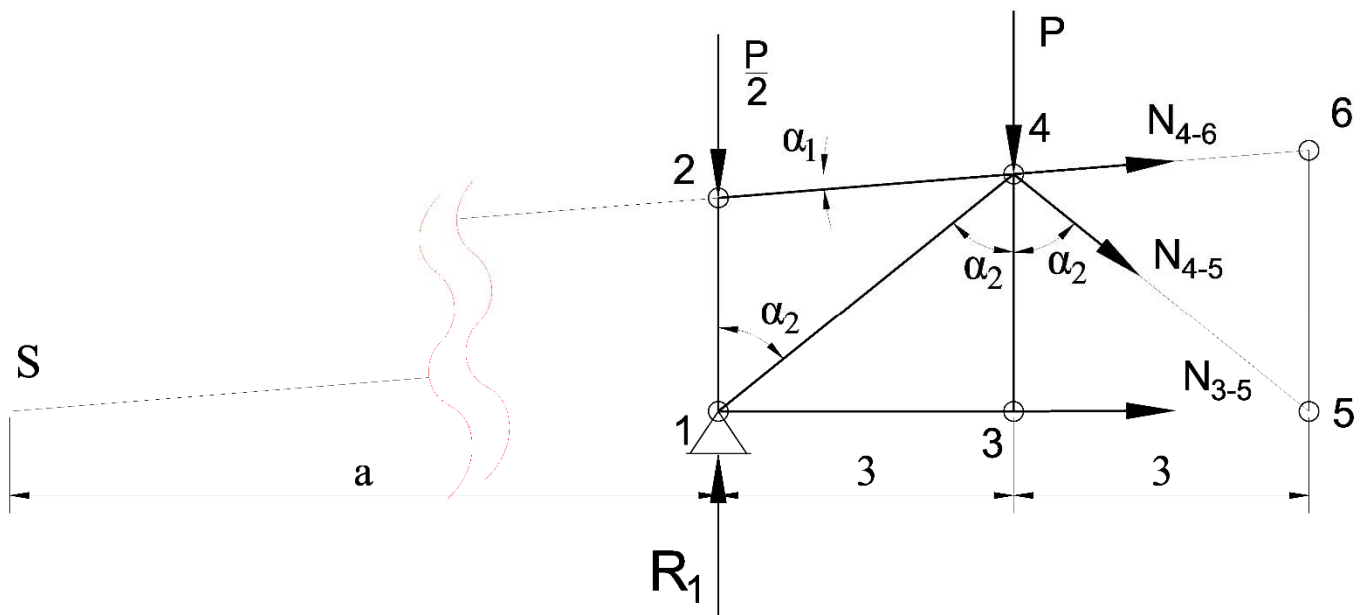


Рисунок 6 Сечение II-II

$$\sum M_S = 0$$

$$0,5P \cdot a - R_1 a + P(a + 3) + N_{4-5} \cdot (a + 3) \cos(\alpha_2) + N_{4-5} \cdot 2,416 \cdot \sin(\alpha_2) = 0$$

$$N_{4-5} = \frac{R_1 a - 0,5Pa - P(a+3)}{(a+3) \cos(\alpha_2) + 2,416 \sin(\alpha_2)} = \frac{36 \cdot 27 - 6 \cdot 27 - 12 \cdot 30}{30 \cos(51,1) + 2,416 \sin(51,1)} = 21,74 \text{ кН}$$

$$\sum M_5 = 0$$

$$R_1 \cdot 6 - 0,5 \cdot 6 \cdot P - P \cdot 3 + N_{4-6} \cdot 3 \sin(\alpha_1) + N_{4-6} \cdot 2,416 \cos(\alpha_1) = 0$$

$$N_{4-6} = \frac{6P - R_1 \cdot 6}{3 \sin(\alpha_1) + 2,416 \cos(\alpha_1)} = \frac{6 \cdot 12 - 36 \cdot 6 - 0}{3 \sin(\alpha_1) + 2,416 \cos(\alpha_1)} = 54,33 \text{ кН}$$

Узел 6

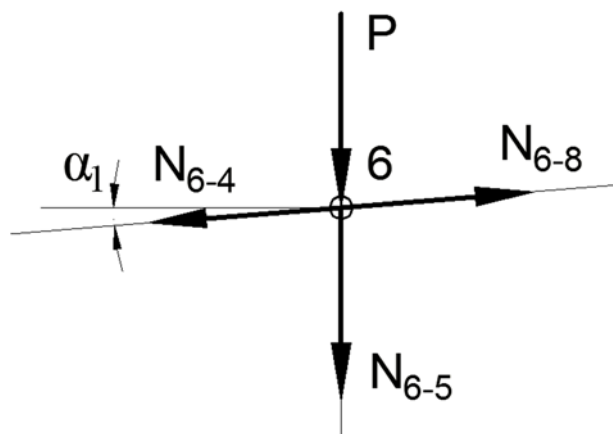


Рисунок 7 Узел 6

$$\sum z = 0$$

$$-N_{4-6} \cdot \cos(\alpha_1) + N_{6-8} \cos(\alpha_1) = 0$$

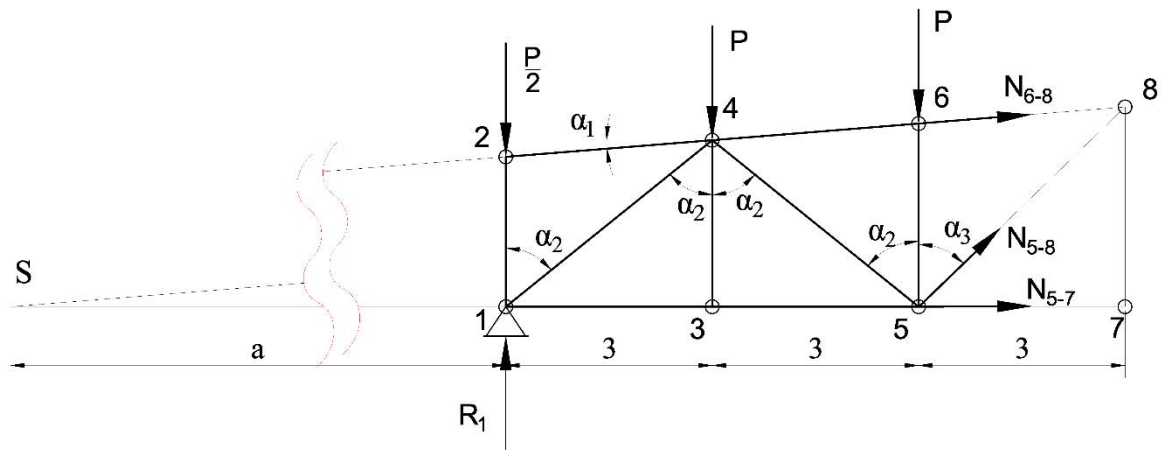
$$N_{6-8} \cos(\alpha_1) = N_{4-6} \cdot \cos(\alpha_1) = -54.33 \text{ кН}$$

$$\sum y = 0$$

$$-P - N_{6-5} - N_{4-6} \cdot \sin(\alpha_1) + N_{6-8} \sin(\alpha_1) = 0$$

$$N_{6-5} = -P = -12 \text{ кН}$$

Сечение III-III



$$\sum M_S = 0$$

$$0,5Pa - R_1 a + P(a + 3) + P(a + 6) - N_{5-8} \cdot (a + 6) \cos(\alpha_3) = 0$$

$$N_{8-5} = \frac{P(2,5a+9) - R_1 a}{(a+6) \cos(\alpha_3)} = \frac{12(2,5 \cdot 27 + 9) - 36 \cdot 27}{33 \cdot \cos(46^\circ)} = -2,35 \text{ кН}$$

$$\sum M_8 = 0$$

$$R_1 9 - 13,5P - 2,9PN_{5-7} = 0$$

$$N_{5-7} = \frac{36 \cdot 9 - 13,5 \cdot 12}{2,9} = 55,86 \text{ кН}$$

Узел 8

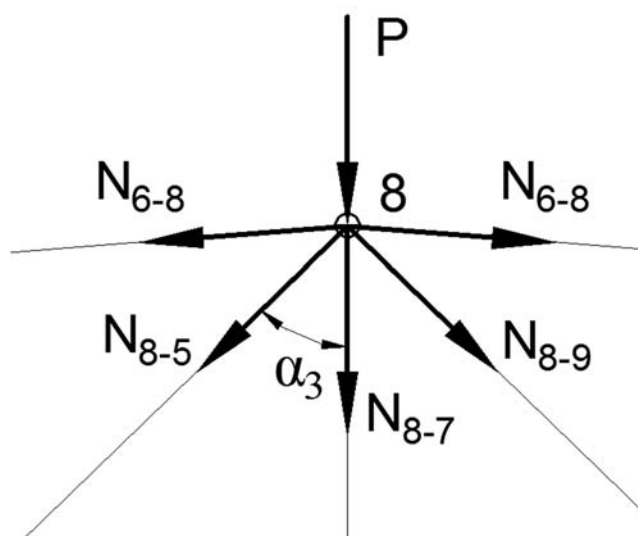


Рисунок 8 Узел 8

$$\sum y = 0$$

$$-P - N_{8-7} - 2N_{8-5} \sin(\alpha_1) - 2N_{8-5} \cos(\alpha_3) = 0$$

$$N_{8-7} = P + 2N_{8-6} \sin(\alpha_1) - 2N_{8-5} \cos(\alpha_3) = 12 + 2 \cdot (-54,33) \cdot \sin(4,6) + 2 \cdot (-14,13) \cdot \cos(46) = 0$$

Полученные значения усилий в стержнях фермы с учетом геометрической симметрии сведем в таблицу 1.

Таблица 1 Значения усилий в стержнях фермы

Верхний пояс		Нижний пояс		Стойки		Раскосы	
N ₂₋₄	0.00	N ₁₋₃	37.23	N ₁₋₂	-36.00	N ₁₋₄	-47.82
N ₁₂₋₁₄		N ₁₁₋₁₃		N ₁₃₋₁₄		N ₁₂₋₁₃	
N ₄₋₆	-54.33	N ₃₋₅	37.23	N ₃₋₄	0.0	N ₄₋₅	21.74
N ₁₀₋₁₂		N ₉₋₁₁		N ₁₁₋₁₂		N ₉₋₁₂	
N ₆₋₈	-54.33	N ₅₋₇	55.86	N ₅₋₆	-12.00	N ₅₋₈	-2.35
N ₈₋₁₀		N ₇₋₉		N ₉₋₁₀		N ₈₋₉	
				N ₇₋₈	0.0		

Для построения линий влияния выберем стержни с максимальными по модулю значениями внутренних усилий: стержень верхнего пояса 6-8, нижнего пояса 5-7, стойку 5-6 и раскос 1-4. Дополнительно построим линию влияния в раскосе 5-8.

4. Построение линий влияния усилий в стержнях фермы аналитическим способом.

Линии влияния опорных реакций.

$$\overline{R_1} = \frac{l-z}{l}, \overline{R_{13}} = \frac{z}{l}$$

Таким образом, для построения линии влияния R_1 откладывает ординату +1 в узле 1, и соединяем ее с нулем в узле 13, а для построения линии влияния R_{13} откладывает ординату +1 в узле 13, и соединяем ее с нулем в узле 1 (Рисунок 11).

Для построения линий влияния усилий в стержнях фермы в общем случае необходимо учитывать расположение грузового пояса (пояса, по которому передвигается подвижная нагрузка). Будем считать, что грузовым является верхний пояс.

Линия влияния усилия в стержне верхнего пояса 6-8.

Проведем сечение I-I (Рисунок 9) через три стержня, включая рассматриваемый. Рассмотрим в равновесии отсеченные части фермы

Груз $\bar{P} = 1$ справа от сечения I – I.

$$\sum M_5 = 0$$

$$\overline{R_1} \cdot 2d + N_{6-8} \cdot h_{6-5} \cos(\alpha_1) = 0$$

$$N_{6-8} = -\frac{2d}{h_{6-5} \cos(\alpha_1)} \overline{R_1} = -2,26 \text{ кН}, \text{ получили уравнение правой ветви (пр. в.).}$$

Груз $\bar{P} = 1$ слева от сечения I – I.

$$\sum M_5 = 0$$

$$-\overline{R_{13}} \cdot 4d - N_{6-8} \cdot h_{7-8} \cos(\alpha_1) + N_{6-8} \cdot d \cdot \sin(\alpha_1) = 0$$

$$N_{6-8} = \frac{4d}{d \cdot \sin(\alpha_1) - h_{7-8} \cos(\alpha_1)} \overline{R_{13}} = 4,53 \text{ кН}, \text{ получили уравнение левой ветви (л. в.).}$$

Линия влияния усилия в стержне нижнего пояса 5-7.

Воспользуемся сечением I – I (Рисунок 9) и рассмотрим в равновесии отсеченные части фермы/

Груз $\bar{P} = 1$ справа от сечения I – I:

$$\sum M_8 = 0$$

$$\overline{R_1} \cdot 3d - N_{5-7} \cdot h_{8-7} = 0$$

$$N_{5-7} = \frac{3d}{h_{8-7}} \overline{R_1} = 3,1 \text{ кН}, \text{ получили уравнение правой ветви (пр. в.).}$$

Груз $\bar{P} = 1$ слева от сечения I – I:

$$\sum M_8 = 0$$

$$N_{5-7} \cdot h_{8-7} - \overline{R_{13}} \cdot 3d = 0$$

$$N_{5-7} = \frac{3d}{h_{8-7}} \overline{R_{13}} = 3,1 \text{ кН}, \text{ получили уравнение левой ветви (л. в.).}$$

Линия влияния усилия в раскосе 5-8.

Построим ее дополнительно к заданным линиям влияния, воспользуемся сечением I – I.

Груз $\bar{P} = 1$ справа от сечения I – I:

$$\sum M_S = 0$$

$$-\bar{R}_1 \cdot a - N_{5-8}(a + 2d) \cdot \cos(\alpha_3) = 0$$

$$N_{5-8} = -\frac{a}{(a+2d) \cdot \cos(\alpha_3)} = \frac{27}{33 \cdot \cos(\alpha_3)} = 1,1 \text{ кН} , \text{ получили уравнение правой ветви (пр. в.).}$$

Груз $\bar{P} = 1$ слева от сечения I – I

$$\sum M_S = 0$$

$$-\bar{R}_{13}(a + 6d) + N_{5-8} \cdot (a + 3d) \cdot \cos(\alpha_3) = 0$$

$$N_{5-8} = \frac{(a+6d)}{(a+3d) \cdot \cos(\alpha_3)} = 1,8 \text{ кН} , \text{ получили уравнение левой ветви (л. в.).}$$

Линия влияния усилия в стойке 5-6. Рассмотрим равновесие узла 2.

1). Груз находится в узле:

$$\sum y = 0$$

$$-\bar{P} - N_{1-2} = 0$$

$$N_{6-5} = -1 \text{ кН.}$$

2). Груз находится вне узла:

$$\sum y = 0$$

$$-N_{1-2} = 0$$

Линия влияния усилия в раскосе 1-4.

Груз $\bar{P} = 1$ справа от сечения II – II (Рисунок 10):

$$\sum M_S = 0$$

$$\bar{R}_1 \cdot a + N_{1-4} \cdot a \cdot \cos(\alpha_2) = 0$$

$$N_{1-4} = -\frac{\bar{R}_1}{\cos(\alpha_2)} = -1,6 \text{ кН} , \text{ получили уравнение правой ветви (пр. в.).}$$

Груз $\bar{P} = 1$ слева от сечения II – II:

$$\sum M_S = 0$$

$$N_{1-4} \cdot a \cos(\alpha_2) - \bar{R}_{13} \cdot (a + 6d) = 0$$

$$N_{1-4} = \frac{(a+6d)}{a \cos(\alpha_2)} = 2,7 \text{ кН} , \text{ получили уравнение левой ветви (л. в.)}$$

.

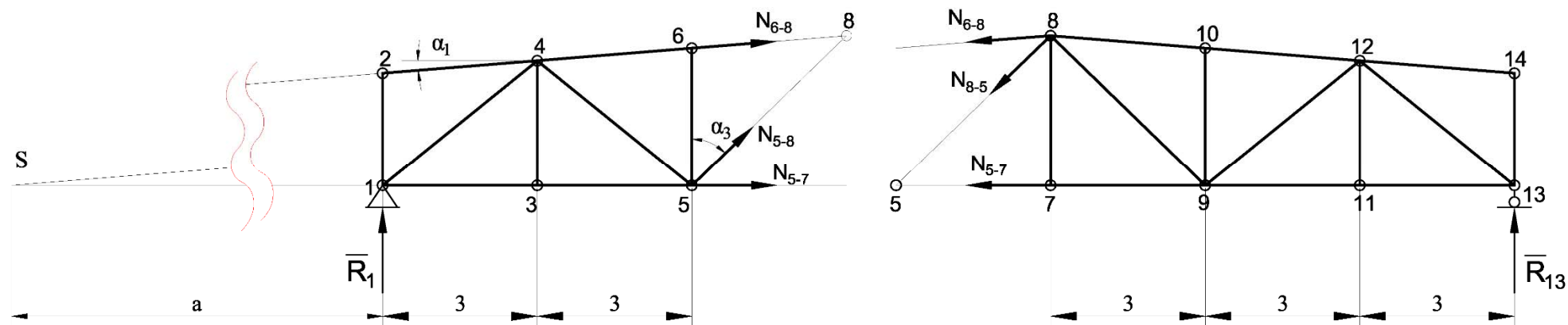


Рисунок 9 Сечение I-I

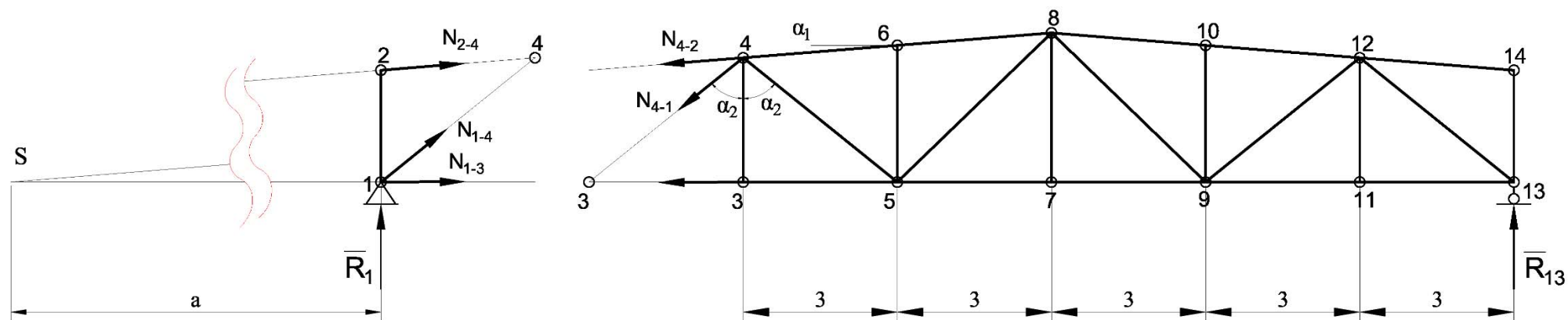


Рисунок 10 Сечение I-I

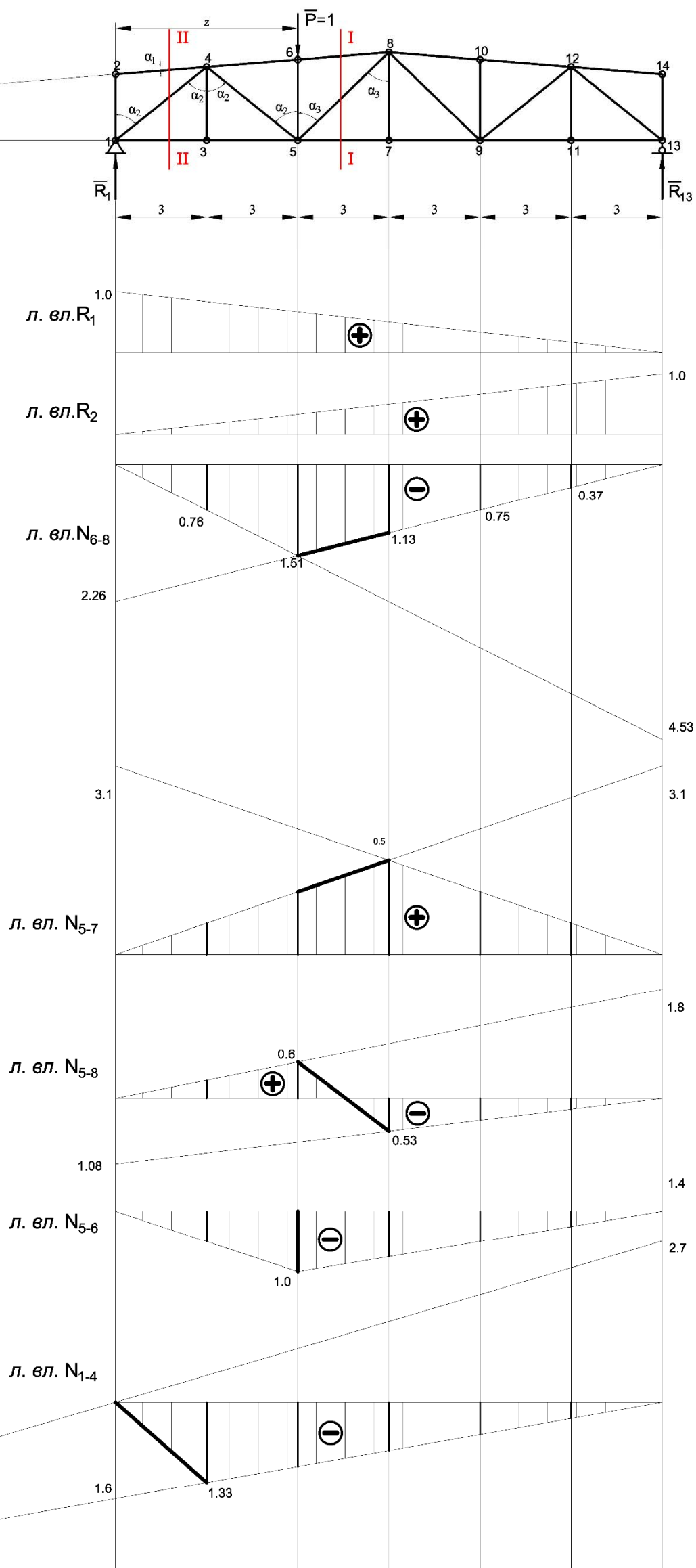


Рисунок 11 Эпюры напряжений от единичной силы

5. Загружение линий влияния.

С помощью линий влияния можно определить усилия в стержнях фермы при действии неподвижной нагрузки. Для этого интенсивность равномерно распределенной нагрузки q умножим на площадь линии влияния ω под этой нагрузкой.

$$\omega_{6-8}^{-} = \frac{1}{2}(-1,51) \cdot 18 = -13,59 \text{ м}$$

$$N_{6-8} = \omega_{6-8}^{-} \cdot q = -13,56 \cdot 4 = -54,4 \text{ кН};$$

$$\omega_{5-7}^{+} = \frac{1}{2}(1,55) \cdot 18 = 13,95 \text{ м}$$

$$N_{5-7} = \omega_{5-7}^{+} \cdot q = 13,95 \cdot 4 = 55,8 \text{ кН};$$

$$\omega_{5-8}^{+} = \frac{1}{2}(0,6) \cdot 7,6 = 2,27 \text{ м}$$

$$\omega_{5-8}^{-} = \frac{1}{2}(-0,55) \cdot 10,4 = -2,86 \text{ м}$$

$$N_{5-8} = (\omega_{5-8}^{+} + \omega_{5-8}^{-}) \cdot q = (2,27 - 2,86) \cdot 4 = -2,3 \text{ кН};$$

$$\omega_{1-2}^{-} = \frac{1}{2}(-1) \cdot 18 = -9 \text{ м}$$

$$N_{1-2} = \omega_{1-2}^{-} \cdot q = -9 \cdot 4 = -36 \text{ кН};$$

$$\omega_{1-4}^{-} = \frac{1}{2}(-1,33) \cdot 18 = -11,97 \text{ м}$$

$$N_{1-4} = \omega_{1-4}^{-} \cdot q = -47,88 \text{ кН}$$

Все значения внутренних усилий совпали со значениями, найденными из статического расчета в пункте 3.

Следует заметить, что загружать линии влияния можно и узловыми сосредоточенными силами, для этого их умножают на ординаты линии влияния в точках их приложения. К примеру

$$N_{6-8} = 0,755P + 1,508P + 1,13P + 0,753P + 0,377P = 4,523P \approx 54,3 \text{ кН}$$

Полученные результаты совпадают.

6. Определение наибольшего растягивающего и наибольшего сжимающего усилий в выбранных стержнях при невыгодном положении нагрузки.

При нахождении равномерно распределенной нагрузки q над какой-либо частью пролета фермы значения усилий в ее стержнях будут изменяться. Если линия влияния усилия одного знака, то максимальное значение усилия будет при нахождении нагрузки q над всем пролетом, то есть при наибольшем значении площади линии влияния ω .

Если ординаты линии влияния усилия изменяют знак, то при невыгодном положении нагрузки усилие в стержне может быть максимальным растягивающим или сжимающим. Для линии влияния N_{5-8} .

$$N_{5-8}^{-max} = \omega_{5-8}^{+} \cdot q = 2,27 \cdot 4 = 9,1 \text{ кН};$$

$$N_{5-8}^{+max} = \omega_{5-8}^{-} \cdot q = -2,86 \cdot 4 = 11,4 \text{ кН}.$$