1. Известно множество $S=\left\{\left(x,y\right)\in R^{2}:\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1\right\}.$

Задать отображения:

$φ\_{1}:S∩\left\{y>0\right\}\rightarrow I\_{1}⊂R$ $φ\_{2}:S∩\left\{x<0\right\}\rightarrow I\_{2}⊂R$

$φ\_{3}:S∩\left\{y<0\right\}\rightarrow I\_{3}⊂R$ $φ\_{4}:S∩\left\{x>0\right\}\rightarrow I\_{4}⊂R$

1. Доказать, что множество S является многообразием, указать его размерность.
2. Вычислить функции замены координат на S:

$$φ\_{12}=φ\_{1}°φ\_{2}^{-1}, φ\_{21}=φ\_{2}°φ\_{1}^{-1}$$

1. Является ли S дифференцируемым многообразием?

Размерность = 2 $\left(x и y\right).$

$$φ\_{1}:\left(x, y\right)\rightarrow \left(x, 0\right)\rightarrow t=x\in (-a;a)$$

$$φ\_{2}:\left(x, y\right)\rightarrow \left(0, y\right)\rightarrow τ=y\in (-b;b)$$

$$φ\_{3}:\left(x, y\right)\rightarrow \left(x, 0\right)\rightarrow t=x\in (-a;a)$$

$$φ\_{4}:\left(x, y\right)\rightarrow \left(0, y\right)\rightarrow τ=y\in (-b;b)$$

$$φ\_{34}=φ\_{3}°φ\_{4}^{-1}$$

$$φ\_{43}=φ\_{4}°φ\_{3}^{-1}$$

$$φ\_{3}^{-1}:t\rightarrow \left(x,y\right)=\left(t,-b\sqrt{1-\frac{t^{2}}{a^{2}}}\right)$$

$$φ\_{43}=φ\_{4}°φ\_{3}^{-1}:t\rightarrow (t,-b\sqrt{1-\frac{t^{2}}{a^{2}}}→τ=-b\sqrt{1-\frac{t^{2}}{a^{2}}}$$

Если $φ\_{ρα}$ дифференцируемы, то само многообразие дифференцируемо $\rightarrow S$ является дифференцируемым многообразием.

1. Известно, что $dω\_{f}^{0}=ω\_{grad(f)}^{1}, dω\_{A}^{1}=ω\_{rot(A)}^{2}, dω\_{B}^{2}=ω\_{div(B)}^{3},$ где

$$f-скалярное поле, A,B-векторные поля на R^{3}.$$

Доказать, используя дифференциальные формы, равенство

$$div\left(fA\right)=A\*grad\left(f\right)+f\*div(A)$$

$$ω\_{div\left(fA\right)}^{3}=dω\_{fA}^{2}=d\left(ω\_{f}^{0}∧ω\_{A}^{2}\right)=dω\_{f}^{0}∧ω\_{A}^{2}+ω\_{f}^{0}∧dω\_{A}^{2}=$$

$$=ω\_{grad\left(f\right)}^{1}∧ω\_{A}^{2}+ω\_{f}^{0}∧ω\_{div\left(B\right)}^{3}=ω\_{grad\left(fA\right)}^{3}+ω\_{f\*div\left(A\right)}^{3}=$$

$$=ω^{3}(grad\left(fA\right)+f\*div\left(A\right))\rightarrow $$

$$\rightarrow div\left(fA\right)=A\*grad\left(f\right)+f\*div\left(A\right)$$

$$div\left(A\*B\right)=B\*rot\left(A\right)-A\*rot(B)$$

$$ω\_{div\left(A\*B\right)}^{3}=dω\_{A\*B}^{2}=d\left(ω\_{A}^{1}∧ω\_{B}^{1}\right)=dω\_{A}^{1}∧ω\_{B}^{1}-ω\_{A}^{1}∧dω\_{B}^{1}=$$

$$=ω\_{rot\left(A\right)}^{2}∧ω\_{B}^{1}-ω\_{A}^{1}∧ω\_{rot\left(B\right)}^{2}=ω\_{B\*rot\left(A\right)}^{3}+ω\_{A\*rot\left(B\right)}^{3}=$$

$$=ω\_{B\*rot\left(A\right)-A\*rot\left(B\right)}^{3}\rightarrow $$

$$\rightarrow div\left(A\*B\right)=B\*rot\left(A\right)-A\*rot\left(B\right)$$

1. Задана дифференциальная форма

$$ω\left(x\right)=x^{1}dx^{1}∧dx^{2}+x^{2}dx^{1}∧dx^{3}+x^{3}dx^{2}∧dx^{3}$$

и отображение $x=f\left(t\right):R^{3}\rightarrow R^{3},$ $заданное матрицей$

$$\left[f\right]=\left[\begin{array}{c}1 3 5\\3 5 1\\5 1 3\end{array}\right].$$

Вычислить $f^{\*}ω\left(t\right)(u\_{1},u\_{2})$ в точке $\left[t\right]=\left[\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right],$ если $\left[u\_{1}\right]=\left[\begin{array}{c}1\\0\\0\end{array}\right], \left[u\_{2}\right]=\left[\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right].$

$$v\_{1}=fu\_{1}=\left(\begin{array}{c}1 3 5\\3 5 1\\5 1 3\end{array}\right)\*\left(\begin{array}{c}1\\0\\0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}1\\3\\5\end{array}\right)$$

$$v\_{2}=fu\_{2}=\left(\begin{array}{c}1 3 5\\3 5 1\\5 1 3\end{array}\right)\*\left(\begin{array}{c}0\\0\\1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}5\\1\\3\end{array}\right)$$

$$x=f\*t=\left(\begin{array}{c}1 3 5\\3 5 1\\5 1 3\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}9\\9\\9\end{array}\right)$$

Сначала запишем форму $ω в точке x=\left(\begin{array}{c}9\\9\\9\end{array}\right)$

$$ω\left(x\right)=x^{1}dx^{1}∧dx^{2}+x^{2}dx^{1}∧dx^{3}+x^{3}dx^{2}∧dx^{3}$$

$$f^{\*}ω\left(x\right)\left(u\_{1},u\_{2}\right)=f\left(dx^{1}∧dx^{2}+dx^{1}∧dx^{3}+dx^{2}∧dx^{3}\right)\left(u\_{1},u\_{2}\right)=$$

$$\left(dx^{1}∧dx^{2}+dx^{1}∧dx^{3}+dx^{2}∧dx^{3}\right)\left(v\_{1},v\_{2}\right)=$$

$$=x^{1}\left|\begin{array}{c}v\_{1}^{1} v\_{2}^{1}\\v\_{1}^{2} v\_{2}^{2}\end{array}\right|+x^{2}\left|\begin{array}{c}v\_{1}^{1} v\_{2}^{1}\\v\_{1}^{3} v\_{2}^{3}\end{array}\right|+x^{1}\left|\begin{array}{c}v\_{1}^{2} v\_{2}^{2}\\v\_{1}^{3} v\_{2}^{3}\end{array}\right|=$$

$$=9\*\left|\begin{array}{c}1 5\\3 1\end{array}\right|+9\*\left|\begin{array}{c}1 5\\5 3\end{array}\right|+9\*\left|\begin{array}{c}3 1\\5 3\end{array}\right|=9\*\left(-14-22+4\right)=9\*\left(-32\right)=-288$$