Дистанционное обучение

Дисциплина «Алгебра и геометрия»

Вариант № 7

1. Решить систему уравнений методом Крамера и методом Гаусса

$$\left\{\begin{array}{c}-2x-y+3z=9\\3x+3y+z=0\\x-2y-z=1\end{array}\right.$$

Решение методом Крамера:

$$∆=\left|\begin{matrix}-2&-1&3\\3&3&1\\1&-2&-1\end{matrix}\right|=-29$$

$$∆\_{1}=\left|\begin{matrix}9&-1&3\\0&3&1\\1&-2&-1\end{matrix}\right|=-19$$

$$∆\_{2}=\left|\begin{matrix}-2&9&3\\3&0&1\\1&1&-1\end{matrix}\right|=47$$

$$∆\_{3}=\left|\begin{matrix}-2&-1&9\\3&3&0\\1&-2&1\end{matrix}\right|=-84$$

$$x\_{1}=\frac{∆\_{1}}{∆}=\frac{19}{29}$$

$$x\_{2}=\frac{∆\_{2}}{∆}=-\frac{47}{29}$$

$$x\_{3}=\frac{∆\_{3}}{∆}=\frac{84}{29}$$

Решение методом Гаусса:

$$\left(\begin{matrix}-2\\3\\1\end{matrix} \begin{matrix}-1\\3\\-2\end{matrix} \begin{matrix}3\\1\\-1\end{matrix} \left|\begin{array}{c}9\\0\\1\end{array}\right.\right)→\left(\begin{matrix}1&\frac{1}{2}\\3&3\\1&-2\end{matrix} \begin{matrix}-\frac{3}{2}&\left|-\frac{9}{2}\right.\\1&\left|0\right.\\-1&\left|1\right.\end{matrix}\right)→$$

$$=\left(\begin{matrix}1&\frac{1}{2}\\0&\frac{3}{2}\\0&-\frac{5}{2}\end{matrix} \begin{matrix}-\frac{3}{2}&\left|-\frac{9}{2}\right.\\\frac{11}{2}&\left|\frac{27}{2}\right.\\\frac{1}{2}&\left|\frac{11}{2}\right.\end{matrix}\right)→\left(\begin{matrix}1&\frac{1}{2}\\0&3\\0&-5\end{matrix} \begin{matrix}-\frac{3}{2}&\left|-\frac{9}{2}\right.\\11&\left|27\right.\\1&\left|11\right.\end{matrix}\right)→$$

$$\left(\begin{matrix}1&\frac{1}{2}\\0&3\\0&0\end{matrix} \begin{matrix}-\frac{3}{2}&\left|-\frac{9}{2}\right.\\11&\left|27\right.\\\frac{58}{3}&\left|56\right.\end{matrix}\right)→\left(\begin{matrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&3&11\\0&0&58\end{matrix} \begin{matrix}\left|-\frac{9}{2}\right.\\\left|27\right.\\\left|168\right.\end{matrix}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{c}x+\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}z=-\frac{9}{2}\\3y+11z=27\\58z=168\end{array}\right.$$

$$58z=168, z=\frac{168}{58}=\frac{84}{29}$$

$$3y+11z=27, y=9-\frac{11z}{3}=9-\frac{11\*84}{3\*29}=\frac{29\*9-11\*28}{29}=-\frac{47}{29}$$

$$x+\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}z=-\frac{9}{2}, x=-\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\*\left(-\frac{47}{29}\right)+\frac{3}{2}\*\frac{84}{29}=\frac{-9\*29+47+252}{29\*2}=$$

$$=\frac{38}{2\*29}=\frac{19}{29}$$

$$X=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{\frac{19}{29}}{\begin{array}{c}-\frac{47}{29}\\\frac{84}{29}\end{array}}\right)$$

1. Для данной матрицы найти обратную матрицу

$$A=\left(\begin{matrix}3&2&2\\1&3&1\\5&3&4\end{matrix}\right)$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\left|A\right|}\*A^{\*^{T}}$$

$$\left|A\right|=36+10+6-30-8-9=5$$

$$A^{\*^{T}}=\left(\begin{matrix}9&-2&-4\\1&2&-1\\-12&1&7\end{matrix}\right)$$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\left(\begin{matrix}9&-2&-4\\1&2&-1\\-12&1&7\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}\frac{9}{5}&\frac{-2}{5}&\frac{-4}{5}\\\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&\frac{-1}{5}\\\frac{-12}{5}&\frac{1}{5}&\frac{7}{5}\end{matrix}\right)$$

1. Даны векторы $\overbar{a}\_{1}=\left\{2; 1; -3\right\}, \overbar{a}\_{2}=\left\{-1; 1; 4\right\}, \overbar{a}\_{3}=\left\{3; 2; -3\right\}.$

Найти:

1. Угол между векторами $\overbar{a}\_{1} и \overbar{a}\_{2}$

$$cosφ=\frac{\left(\overbar{a}\_{1}, \overbar{a}\_{2}\right)}{\left|\overbar{a}\_{1}\right|\*\left|\overbar{a}\_{2}\right|}=\frac{a\_{1x}\*a\_{2x}+a\_{1y}\*a\_{2y}+a\_{1z}\*a\_{2z}}{\sqrt{a\_{1x}^{2}+a\_{1y}^{2}+a\_{1z}^{2}}\sqrt{a\_{2x}^{2}+a\_{2y}^{2}+a\_{2z}^{2}}}=$$

$$=\frac{-2+1-12}{\sqrt{4+1+9}\sqrt{1+1+16}}=\frac{-13}{\sqrt{14\*18}}=-\frac{13}{3\sqrt{28}}=-\frac{13}{6\sqrt{7}}$$

$$φ=\arccos(\left(-\frac{13}{6\sqrt{7}}\right))$$

1. Проекцию вектора $\overbar{a}\_{1} на вектор \overbar{a}\_{2}$

$$Пр\_{\overbar{a}\_{2}}\overbar{a}\_{1}=\frac{\left(\overbar{a}\_{1}, \overbar{a}\_{2}\right)}{\left|\overbar{a}\_{2}\right|}=\frac{a\_{1x}\*a\_{2x}+a\_{1y}\*a\_{2y}+a\_{1z}\*a\_{2z}}{\sqrt{a\_{2x}^{2}+a\_{2y}^{2}+a\_{2z}^{2}}}=-\frac{13}{\sqrt{18}}=-\frac{13\sqrt{2}}{6}$$

1. Векторное произведение $\overbar{a}\_{1}х \overbar{a}\_{2}$

$$\overbar{a}\_{1}х \overbar{a}\_{2}=\left|\begin{matrix}\overbar{i}&\overbar{j}&\overbar{k}\\2&1&-3\\-1&1&4\end{matrix}\right|=\overbar{i}\left|\begin{matrix}1&-3\\1&4\end{matrix}\right|-\overbar{j}\left|\begin{matrix}2&-3\\-1&4\end{matrix}\right|+\overbar{k}\left|\begin{matrix}2&1\\-1&1\end{matrix}\right|=$$

$$=7\overbar{i}-5\overbar{j}+3\overbar{k}=\left(7; -5; 3\right)$$

1. Площадь треугольника, построенного на векторах $\overbar{a}\_{1}, \overbar{a}\_{2}$

$$S=\frac{1}{2}\left|\overbar{a}\_{1}х \overbar{a}\_{2}\right|$$

$$\overbar{a}\_{1}х \overbar{a}\_{2}=\left(7; -5; 3\right)$$

$$\left|\overbar{a}\_{1}х \overbar{a}\_{2}\right|=\sqrt{7^{2}+\left(-5\right)^{2}+3^{2}}=\sqrt{49+25+9}=\sqrt{83}$$

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{83}=\frac{\sqrt{83}}{2}$$

1. Даны координаты вершин треугольника

$$A\left(0,1\right);B\left(2,5\right);C(10,1)$$

1. Составить уравнение стороны $AB$

$$\frac{x-x\_{A}}{x\_{B}-x\_{A}}=\frac{y-y\_{A}}{y\_{B}-y\_{A}}$$

$$\frac{x-0}{2-0}=\frac{y-1}{5-1}$$

$$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{4}$$

$$2x=y-1$$

$$y=2x+1 или y-2x-1=0$$

1. Составить уравнение высоты $AD$

$$DϵBC$$

Уравнение прямой $BC:$

$$\frac{x-x\_{B}}{x\_{C}-x\_{B}}=\frac{y-y\_{B}}{y\_{C}-y\_{B}}$$

$$\frac{x-2}{10-2}=\frac{y-5}{1-5}$$

$$\frac{x-2}{8}=\frac{y-5}{-4}$$

$$x-2=10-2y$$

$$2y+x-12=0$$

Уравнение высоты $AD:$

$$\frac{x-x\_{A}}{1}=\frac{y-y\_{A}}{2}$$

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-1}{2}$$

$$x=\frac{y-1}{2}$$

$$2x=y-1$$

$$y-2x-1=0$$

1. Найти длину медианы $BE$

Обозначим середину стороны АС буквой E. Тогда координаты точки М:

$$x\_{E}=\frac{x\_{A}+x\_{C}}{2}=\frac{0+10}{2}=5$$

$$y\_{E}=\frac{y\_{A}+y\_{C}}{2}=\frac{1+1}{2}=1$$

$$d=\sqrt{(x\_{E}-x\_{B})^{2}+(y\_{E}-y\_{B})^{2}}$$

$$d=\sqrt{(5-2)^{2}+(1-5)^{2}}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

1. Найти точку пересечения высот треугольника $ABC$

Уравнение высоты $AD: y-2x-1=0$

Составим уравнение высоты $CF, FϵAB$

Уравнение стороны $AB: y-2x-1=0$

уравнение высоты $CF:$

$$\frac{x-x\_{C}}{-2}=\frac{y-y\_{C}}{1}$$

$$\frac{x-10}{-2}=\frac{y-1}{1}$$

$$x-10=-2y+2$$

$$2y+x-12=0$$

$$\left\{\begin{array}{c}y-2x-1=0\\2y+x-12=0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}y=2x+1\\2y+x-12=0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}y=2x+1\\2\left(2x+1\right)+x-12=0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}y=2x+1\\4x+2+x-12=0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}y=2x+1\\5x=10\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}y=2x+1\\x=2\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}y=5\\x=2\end{array}\right.$$

1. Даны координаты вершин пирамиды

$$A\left(1;2;-1\right);B\left(0;-2;0\right);C\left(4;1;-3\right);D(-3;-2;1)$$

$Найти$:

1. Уравнение плоскости $ABC$

Возьмем произвольную точку $M(x;y;z)$

$$\overbar{CM}=(x-4;y-1;z+3)$$

$$\overbar{CA}=\left(1-4;2-1;-1-\left(-3\right)\right)=(-3;1;2)$$

$$\overbar{CB}=\left(0-4;-2-1;0-\left(-3\right)\right)=(-4;-3;3)$$

Если произвольная точка $M(x;y;z)$ принадлежит плоскости $ABC$, тогда три найденные вектора лежат в одной плоскости.

$$\left|\begin{matrix}x-4&y-1&z-(-3)\\-3&1&2\\-4&-3&3\end{matrix}\right|=0$$

$$\left|\begin{matrix}x-4&y-1&z-\left(-3\right)\\-3&1&2\\-4&-3&3\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}x&y&z\\-3&1&2\\-4&-3&3\end{matrix}\right|-\left|\begin{matrix}4&1&-3\\-3&1&2\\-4&-3&3\end{matrix}\right|=$$

$$=x\*\left|\begin{matrix}1&2\\-3&3\end{matrix}\right|-y\*\left|\begin{matrix}-3&2\\-4&3\end{matrix}\right|+z\*\left|\begin{matrix}-3&1\\-4&-3\end{matrix}\right|-\left|\begin{matrix}4&1&-3\\-3&1&2\\-4&-3&3\end{matrix}\right|=$$

$$=9x+y+13z+2$$

1. Уравнение прямой $AD$

$$\frac{x-x\_{A}}{x\_{D}-x\_{A}}=\frac{y-y\_{A}}{y\_{D}-y\_{A}}=\frac{z-z\_{A}}{z\_{D}-z\_{A}}$$

$$\frac{x-1}{-3-1}=\frac{y-2}{-2-2}=\frac{z-(-1)}{1-(-1)}$$

$$\frac{x-1}{-4}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z+1}{2}$$

1. Угол между плоскостью $ABC$ и прямой $AD$

$$\sin(\left(φ\right))=\frac{9\*\left(-4\right)+1\*\left(-4\right)+13\*2}{\sqrt{9^{2}+1^{2}+13^{2}}\*\sqrt{(-4)^{2}+(-4)^{2}+2^{2}}}=\frac{-36-4+26}{\sqrt{251}\*\sqrt{36}}$$

$$=\frac{-14}{6\sqrt{251}}=-\frac{7}{3\sqrt{251}}$$

$$φ=\arcsin(\left(-\frac{7}{3\sqrt{251}}\right))$$

1. Объем пирамиды $ABCD$

$$\overbar{AB}=\left\{0-1;-2-2;0-(-1)\right\}=\left\{-1;-4;1\right\}$$

$$\overbar{AC}=\left\{4-1;1-2;-3-(-1)\right\}=\left\{3;-1-2\right\}$$

$$\overbar{AD}=\left\{-3-1;-2-2;1-(-1)\right\}=\left\{-4;-4;2\right\}$$

$$V=\pm \frac{1}{6}\left|\begin{matrix}-1&-4&1\\3&-1&-2\\-4&-4&2\end{matrix}\right|=\pm \frac{1}{6}\left(2-32-12-4+24+8\right)=\frac{14}{6}$$