Functional Analysis. Worksheet.

Доказать, что подпространство $X = \{\, x \in C[-1,1] \mid t^4 \leq |x(t)| \leq t^2,\ t \in C[-1,1] \,\}$ метрического пространства $C[-1,1]$ является полным метрическим пространством.

Пусть $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная последовательность функций из X. Поскольку $C[-1,1]$ является полным метрическим пространством, то $\{x_n\}$ имеет предел

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_{C[-1,1]} = 0, \quad x \in C[-1,1].$$

Возьмем $t \in C[-1,1]$, тогда для верхней оценки справедливо неравенство

$$|x(t)| = |x(t) - x_n(t) + x_n(t)| \leq |x(t) - x_n(t)| + |x_n(t)| \leq t^2 + \|x_n - x\|_{C[-1,1]}$$

Аналогично, оценка снизу имеет вид

$$t^4 \leq |x_n(t)| = |x_n(t) - x(t) + x(t)| \leq |x_n(t) - x(t)| + |x(t)| \leq \|x_n - x\|_{C[-1,1]} + |x(t)|.$$

Устремляя $n \to \infty$, получаем: $t^4 \leq |x(t)| \leq t^2$, значит $x \in X$ и подпространство X является полным метрическим пространством. ■

Доказать непрерывность отображения $A : C[a,b] \to C[a,b]$, где $Ax(t) = \frac{1}{1+|x(t)|}$.

Пусь $x, y \in C[a,b]$ и $t \in [a,b]$. Непрерывность отображения A следует из следующей оценки

$$|Ax(t) - Ay(t)| = \left| \frac{1}{1+|x(t)|} - \frac{1}{1+|y(t)|} \right| = \left| \frac{y(t) - x(t)}{(1+|x(t)|)(1+|y(t)|)} \right| \leq$$
$$\leq ||y(t)| - |x(t)|| \leq |y(t) - x(t)| \leq \|y - x\|_{C[a,b]}.$$

■

Пользуясь теоремой о неподвижной точке сжимающего отображения, доказать, что уравнение

$$4x(t) - t = \int\limits_0^t \sqrt{1 + x^2(s)}\, ds$$

имеет единственное решение в пространстве $C[0,1]$. Указать алгоритм поиска решения. Вычислить первые два приближения к решению, взяв исходную функцию $x_0(t) = 0$. Оцените точность найденного приближенного решения. Сколько итераций нужно сделать, чтобы получить решение с точностью 0,000001?

Представим уравнение в следующем виде

$$x(t) = Ax(t), \quad Ax(t) = \frac{1}{4}(t + \int_0^t \sqrt{1 + x^2(s)}\, ds). \tag{1}$$

Покажем, что оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$ является сжимающим. Пусть $x, y \in C[0,1]$, тогда

$$\begin{aligned}
\rho(Ax, Ay) &= \max_{t\in[0,1]} |Ax(t) - Ay(t)| = \\
&= \frac{1}{4} \max_{t\in[0,1]} \left| \int_0^t \sqrt{1 + x^2(s)}\, ds - \int_0^t \sqrt{1 + y^2(s)}\, ds \right| = \\
&= \frac{1}{4} \max_{t\in[0,1]} \left| \int_0^t \left(\sqrt{1 + x^2(s)} - \sqrt{1 + y^2(s)} \right) ds \right| \le \\
&\le \frac{1}{4} \max_{t\in[0,1]} \int_0^t \left| \left(\sqrt{1 + x^2(s)} - \sqrt{1 + y^2(s)} \right) \right| ds.
\end{aligned}$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что

$$|f'(x)| = \frac{|x|}{\sqrt{1 + x^2}} \le 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

откуда, используя теорему Лагранжа среднем значении, получаем следующую оценку

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| \le |x - y|, \quad c \in (x, y).$$

Таким образом

$$\int_0^t \left| \sqrt{1 + x(s)^2} - \sqrt{1 + y(s)^2} \right| ds \le \int_0^t |x(s) - y(s)|\, ds \le \int_0^t \rho(x, y)\, ds \le \rho(x, y).$$

Отсюда

$$\rho(Ax, Ay) \le \frac{1}{4}\rho(x, y).$$

что означает сжимаемость оператора A с константой $1/4$. Применяя теорему о неподвижной точке сжимающего отображения, получаем что уравнение (1) имеет единственное решение, которое есть предел реккурентво заданной последовательности

$$x_n = Ax_{n-1}$$

с произвольной начальной точкой $x_0 \in C[0,1]$. Пусть x_∞ – точное решение (1), а e_n – точность решения на n-й итерации. Для нее справедлива оценка

$$e_n = \rho(x_\infty, x_n) \le \frac{q^n \alpha}{1 - q}, \quad \alpha = \rho(x_1, x_0);$$

здесь q – константа сжимаемости отображения. В нашем случае $q = 1/4$.

Возьмем $x_0(t) \equiv 0$ и вычислим первые два приближения к решению

$$x_1 = Ax_0 = \frac{1}{4}(t + \int\limits_0^t ds) = \frac{t}{2}, \qquad \alpha = \|\frac{t}{2} - 0\|_{C[0,1]} = \frac{1}{2}, \quad e_1 \le \frac{1}{6}$$

$$x_2 = Ax_1 = \frac{1}{4}(t + \int\limits_0^t \sqrt{1 + \frac{s^2}{2}}\, ds) = \qquad e_2 \le \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{24}.$$

$$= \frac{1}{4}\big(t + \frac{1}{4} t\sqrt{t^2 + 4} + \ln(\sqrt{\frac{t^2}{4} + 1} + \frac{t}{2})\big),$$

Оценим количество итерация для точности 10^{-6}. Для этого рассмотрим последнее неравенство из оценки

$$e_n \le \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n < 10^{-6},$$

откуда получим

$$n > \log_4 \frac{2 \cdot 10^6}{3} \approx 9.$$

■

Пользуясь теоремой о неподвижной точке сжимающего отображения, доказать, что уравнение

$$x(t) + \frac{1}{2} = \int\limits_0^t s^2 x^2(s)\, ds$$

имеет единственное решение в пространстве X из задачи 1. Указать алгоритм поиска решения. Вычислить первые два приближения к решению, взяв исходную функцию $x_0(t) = 0$. Оцените точность найденного приближенного решения. Сколько итераций нужно сделать, чтобы получить решение с точностью 0,000001?

Представим уравнение в следующем виде

$$x(t) = Ax(t), \quad Ax(t) = -\frac{1}{2} + \int\limits_0^t s^2 x^2(s)\, ds \tag{2}$$

Покажем, что оператор $A : X \to X$ является сжимающим. Пусть $x, y \in X$, тогда

$$\begin{aligned}
\rho(Ax, Ay) &= \max_{t\in[0,1]} |Ax(t) - Ay(t)| = \max_{t\in[0,1]} \left| \int\limits_0^t s^2 x^2(s)\, ds - \int\limits_0^t s^2 y^2(s)\, ds \right| = \\
&= \max_{t\in[0,1]} \left| \int\limits_0^t s^2\big(x^2(s) - y^2(s)\big)\, ds \right| \le \max_{t\in[0,1]} \int\limits_0^t \Big| s^2\big((x(s) - y(s))(x(s) + y(s)\big)\Big|\, ds \\
&\le \max_{t\in[0,1]} \left| \int\limits_0^t s^2\, ds \right| \cdot |x(t) - y(t)| \le \frac{1}{3}\rho(x, y).
\end{aligned}$$

Значит оператор A является сжимающим с константой $1/3$. Применяя теорему о неподвижной точке сжимающего отображения, получаем что уравнение (2) имеет единственное решение, которое есть предел реккурентво заданной последовательности

$$x_n = Ax_{n-1}$$

с произвольной начальной точкой $x_0 \in X$. Пусть x_∞ – точное решение (2), а e_n – точность решения на n-й итерации. Для нее справедлива оценка

$$e_n = \rho(x_\infty, x_n) \le \frac{q^n \alpha}{1 - q}, \quad \alpha = \rho(x_1, x_0);$$

здесь q – константа сжимаемости отображения. В нашем случае $q = 1/3$.

Возьмем $x_0(t) \equiv 0$ и вычислим первые два приближения к решению

$$x_1 = Ax_0 = -\frac{1}{2}, \qquad \alpha = \|x_1 - x_0\|_X = \frac{1}{2}, \quad e_1 \le \frac{1}{4}$$

$$x_2 = Ax_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\int\limits_0^t s^2\,ds = -\frac{1}{2} + \frac{t^3}{12}, \qquad e_2 \le \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{12}.$$

Оценим количество итерация для точности 10^{-6}. Для этого рассмотрим последнее неравенство из оценки

$$e_n \le \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n < 10^{-6},$$

откуда получим

$$n > \log_2\left(2\cdot 10^6\cdot(1+\pi)\right) \approx 23.$$

■

$\boxed{\text{Доказать непрерывность отображения } A : C[a,b] \to C[a,b], \text{ где } Ax(t) = t^2\sin^2(x(t)).}$

Пусь $x, y \in C[0,1]$ и $t \in [0,1]$, тогда

$$|Ax(t) - Ay(t)| = \left|t^2\big(\sin^2 x(t) - \sin^2 y(t)\big)\right| = \left|t^2\big(\sin x(t) - \sin y(t)\big)\big(\sin x(t) + \sin y(t)\big)\right| \le$$
$$\le 2\left|t^2\big(\sin x(t) - \sin y(t)\big)\right| \le 2b^2\left|\big(\sin x(t) - \sin y(t)\big)\right|.$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что

$$|f'(x)| = \cos x \le 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Используя теорему Лагранжа среднем значении, получаем следующую оценку

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x-y| \le |x-y|, \quad c \in (x,y).$$

Таким образом

$$|Ax(t) - Ay(t)| \le 2b^2\,|x(s) - y(s)| \le 2b^2\|x-y\|_{C[a,b]},$$

откуда следует непрерывность отображения A. ■

Мера Лебега-Стилтьеса задана обобщенной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0,\ x \le -1; \\ x^2 + 2x + 2,\ x \in (-1, 0]; \\ 3e^x,\ x > 0. \end{cases}$$

Найти меру промежутков $[-1,0]$, $(-1,0]$, $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, $[0,1]$, а также меру множества рациональных чисел.

Меры указанных промежутков равны

$$\begin{aligned} dF([-1,0]) &= F(0) - F((-1)-) = 2, \\ dF\big((-1,0]\big) &= F(0) - F(-1) = 2, \\ dF\big((-\frac{1}{2},\frac{3}{2})\big) &= F(\frac{3}{2}-) - F(\frac{1}{2}) = 3\Big(e^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}\Big), \\ dF([0,1]) &= F(1) - F(0-) = 3e - 2. \end{aligned}$$

Пояснение: $F(x_0-) = \lim\limits_{x<x_0, x\to 0} F(x)$. Множество рациональных чисел можно представить в виде следующего счетного обьединения $\mathbb{Q} = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}} \{\frac{m}{n}\}$. Тогда

$$dF(\mathbb{Q}) = \sum_{m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}} dF(\{\frac{m}{n}\}), \quad dF(\{x_0\}) = F(x_0) - F(x_0-),$$

здесь мы использовали счетную аддитивность меры Лебега-Стилтьеса. Поскольку во всех внутренних точках интервалов $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$ и $(0,+\infty)$ функция $F(x)$ является непрерывной справа, значит $dF(\{\frac{m}{n}\}) = 0$ в этих точках и остается проверить граничные точки $\{-1\}$ и $\{0\}$. Имеем

$$dF(\mathbb{Q}) = dF(\{-1\}) + dF(\{0\}) = F(-1) - F((-1)-) + F(0) - F(0-) = 0.$$

■