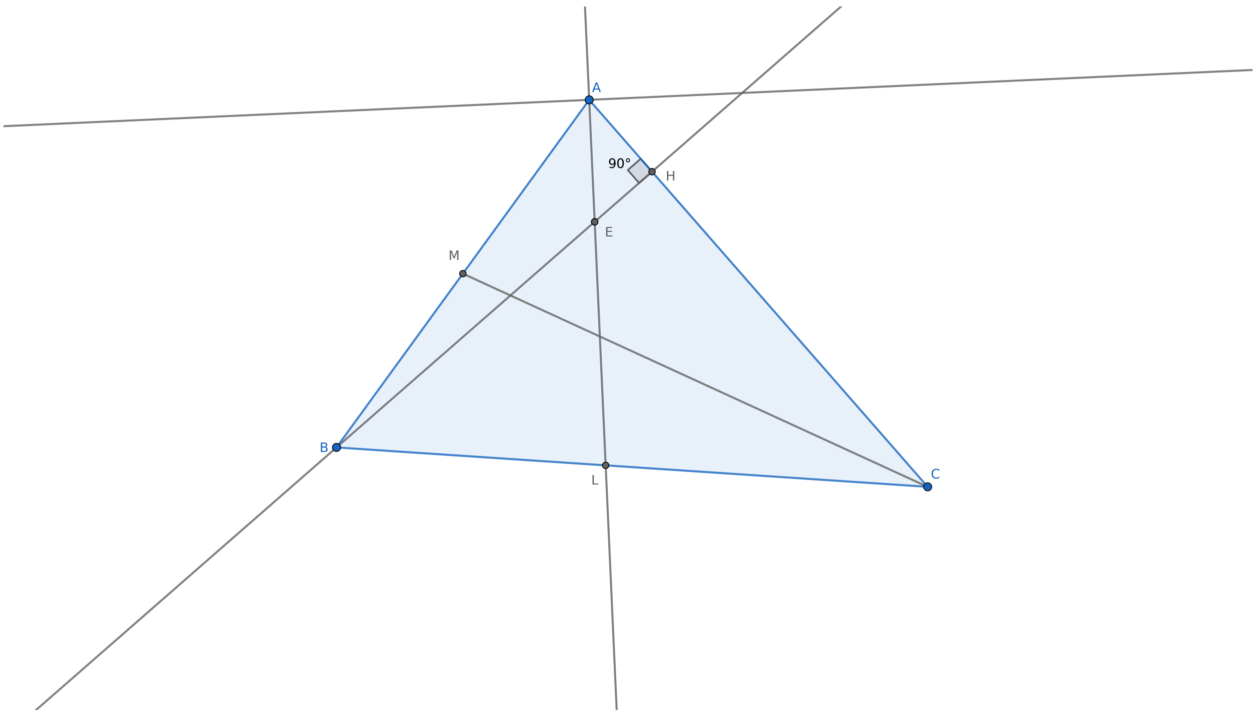
©Viktor Schastnyy

Plane Geometry. Worksheet.

Дан треугольник  со сторонами $AB = 10$, $BC = 12$, $AC = 14$. Найдите: 1) площадь треугольника $ABC$ 2) $\cos B$, $\sin A$, $\operatorname{ctg} C$ 3) медиану $CM$, проведённую к меньшей стороне 4) биссектрису $AL$, проведённую к средней стороне 5) высоту $BH$, проведённую к большей стороне 6) $r$, $R$ 7*) пусть $AL$ и $BH$ пересекаются в точке $E$. Найдите отрезки, на которые они делятся точкой .




1) Найдем площадь трегольника по формуле Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = (a+b+c)/2.$$

Имеем $p = (10+12+14)/2 = 18$, тогда $S = \sqrt{18(18-10)(18-12)(18-14)} = 24\sqrt{6}$.

2) Найдем $\cos B$. Для этого воспользуемся теоремой косинусов:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B \Leftrightarrow 14^2 = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{1}{5}.$$

Для нахождения $\sin B$ воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\cos^2 B + \sin^2 B = 1 \Rightarrow \sin B = \pm\sqrt{1-\cos^2 B} = \frac{2\sqrt{6}}{5}, \text{ (выбираем знак +)}.$$

Воспользуемся теоремой синусов, чтобы найти $\sin A$

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Leftrightarrow \frac{12}{\sin A} = \frac{14 \cdot 5}{2\sqrt{6}} \Rightarrow \sin A = \frac{12\sqrt{6}}{35}.$$

Чтобы найти $\operatorname{ctg} C$, найдем отдельно $\cos C$ и $\sin C$. Из теоремы косинусов для стороны $AB$ получаем:

$$10^2 = 14^2 + 12^2 - 2 \cdot 14 \cdot 12 \cdot \cos C \Rightarrow \cos C = \frac{5}{7}.$$

Из теоремы синусов имеем:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{12 \cdot 35}{12\sqrt{6}} = \frac{10}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{2\sqrt{6}}{7}.$$

Итак,

$$\operatorname{ctg} C = \frac{\cos C}{\sin C} = \frac{5 \cdot 7}{7 \cdot 2\sqrt{6}} = \frac{5}{2\sqrt{6}}.$$

3) Вычислим длину медианы $CM$, используя теорему Аполлония:

$$CM = \frac{\sqrt{2 \cdot BC^2 + 2 \cdot CA^2 - AB^2}}{2} = \frac{\sqrt{2 \cdot 12^2 + 2 \cdot 14^2 - 10^2}}{2} = \sqrt{145}.$$

4) Вычислим длину биссектрисы $AL$, используя теорему Стюарта:

$$AL = \frac{2\sqrt{AB \cdot AC \cdot p \cdot (p - BC)}}{AB + AC} = \frac{2\sqrt{10 \cdot 14 \cdot 18 \cdot 6}}{24} = \sqrt{105}.$$

5) Найдем высоту $BH$, как проекцию стороны $AB$ на сторону $AC$. Имеем

$$BH = AB \cdot \sin A = \frac{10 \cdot 12\sqrt{6}}{35} = \frac{24\sqrt{6}}{7}.$$

6) Радиусы вписанной окружности $r$ и описанной $R$ вычисляются по формулам:

$$r = \frac{S}{p} = \frac{24\sqrt{6}}{18} = \frac{4\sqrt{6}}{3}, \quad R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4 \cdot S} = \frac{10 \cdot 12 \cdot 14}{24\sqrt{6}} = \frac{35\sqrt{6}}{3}.$$

7*) Введем прямоугольную систему координат $Axy$. В ней точки $H$, $B$ и $C$ имеют следующие координаты:

$$H\left(\frac{38}{7}, 0\right), \quad B\left(\frac{38}{87}, \frac{24\sqrt{6}}{7}\right), \quad C(14, 0).$$

Единичные вектора $e_{AC}$, $e_{AB}$ и направляющий вектор биссектрисы $e_{AL}$ имеют вид:

$$e_{AC} = \frac{\vec{AC}}{AC} = (1, 0), \quad e_{AB} = \frac{\vec{AB}}{AB} = \frac{(38, 24\sqrt{6})}{70}, \quad e_{AL} = e_{AC} + e_{AB} = \frac{(54, 12\sqrt{6})}{35}.$$

Уравнение прямых $BH$ и $AL$ равны:

$$BH : x = \frac{38}{7}, \quad AL : \frac{35 \cdot x}{54} = \frac{35 \cdot y}{12\sqrt{6}} \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}x.$$

Эти прямые пересекаются в точке $E$, которая имеет следующие координаты

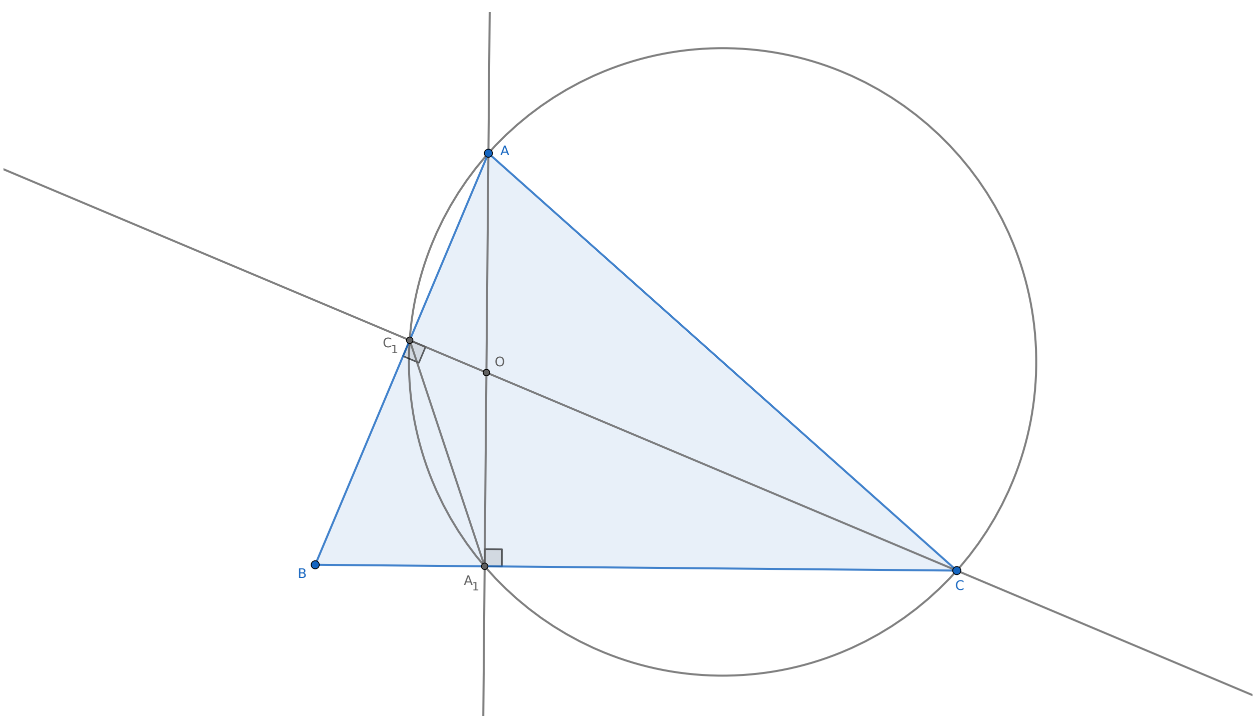
$$E = AL \cap BH = \left(\frac{38}{7}, \frac{76\sqrt{6}}{63}\right).$$

Отсюда, сразу получаем

$$HE = y_E = \frac{76\sqrt{6}}{63}, \quad BE = y_B - y_E = \frac{20\sqrt{6}}{9}, \quad AE = \sqrt{\left(\frac{38}{7}\right)^2 + \left(\frac{76\sqrt{6}}{63}\right)^2} = \frac{38\sqrt{105}}{63}.$$

■

В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AA_1$ и $CC_1$, пересекающиеся в точке $O$. 1) докажите, что треугольники $AOC$ и $A_1OC_1$ подобны 2) известно, что $\angle B = 30^\circ$, $S_{ABC} = 80$. Найдите площадь $AC_1A_1C$




1) Построим окружность с диаметром $AC$. Тогда $\angle ACC_1 = \angle AA_1C_1$, как углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности. Аналогично, $\angle A_1C_1C = \angle A_1AC$. Углы $C_1OA_1$ и $AOC$ равны, как вертикальные. Значит треугольники $AOC$ и $A_1OC_1$ подобны (два равных угла).

2) Рассмотрим прямоугольные треугольникики $BC_1C$ и $AA_1B$. Поскольку $\angle B = 30^\circ$, то верны следующие равенства:

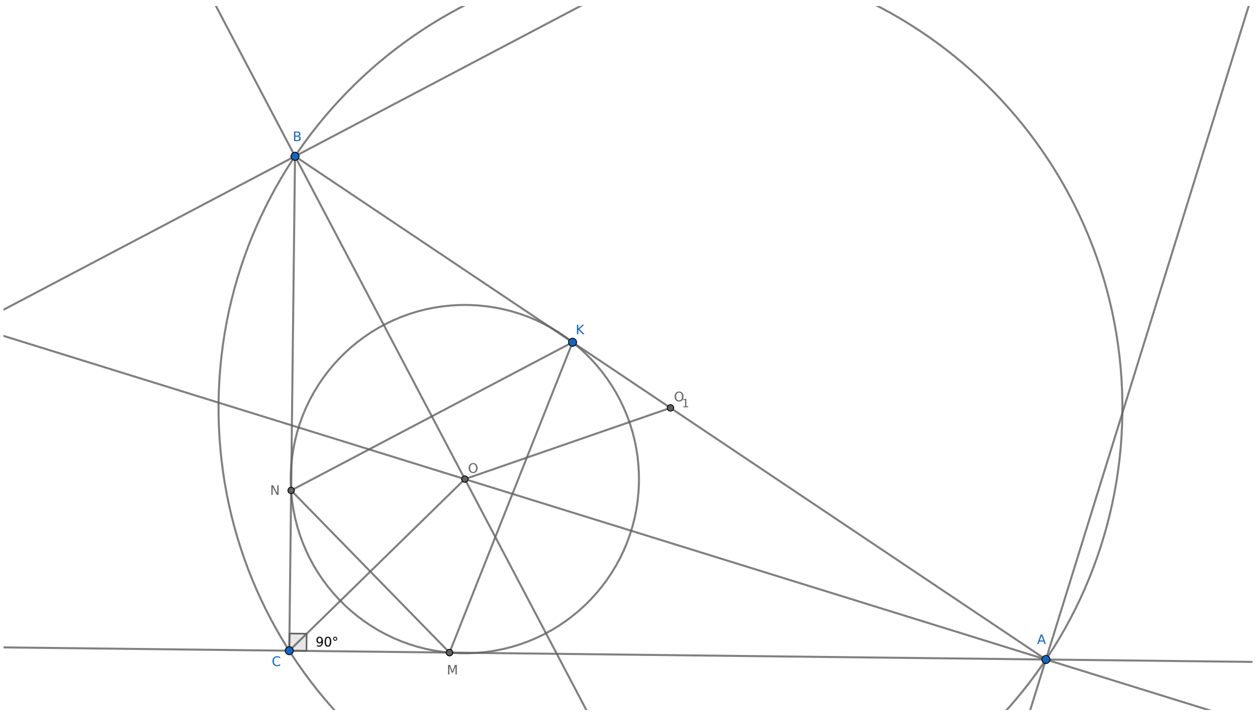
$$C_1C = \frac{BC}{2}, \quad AA_1 = \frac{AB}{2}.$$

Углы $\angle B$ и $\angle A_1OC$ равны, т.к. треугольники $CC_1B$ и $COA_1$ подобны. Площадь четырехугольника $AC_1A_1C$ равна

$$S_{AC_1A_1C} = \frac{C_1C \cdot AA_1 \cdot \sin \angle A_1OC}{2} = \frac{BC \cdot AB \cdot \sin \angle B}{2 \cdot 4} = \frac{S_{ABC}}{4} = 20.$$

■

Дан прямоугольный треугольник $ABC$ ($\angle C = 90°$), известно, что $AB = 26$, $AC = 24$. $O$ и $O_1$ – центры вписанной и описанной окружностей треугольника $ABC$, точки $M, N, K$ – точки касания вписанной окружности со сторонами $AC, BC$ и $AB$ соответственно. Найдите: 1) $r_{ABC}$ 2) $R_{ABC}$ 3) отрезки $AM, BN, CN$ 4) $\angle AOB$ 5) расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника $ABC$ 6) площадь треугольника $KMN$ 7*) площадь четырёхугольника $AO_1OC$




1) и 2) Радиусы вписанной и описанной окружности найдем, используя следующие формулы, справедливые для прямоугольного треугольника:

$$r_{ABC} = \frac{AC + BC - AB}{2}, \quad R_{ABC} = \frac{AB}{2}, \quad BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}.$$

Подставляя численные значения, получим:

$$BC = \sqrt{26^2 - 24^2} = \sqrt{2 \cdot 50} = 10, \quad r_{ABC} = 4, \quad R_{ABC} = 13.$$

3) Т. к. $ON \parallel MC$ и $ON = r_{ABC}$, то $MC = r_{ABC} = 4$. Аналогично, $CN = r_{ABC} = 4$. Значит, $AM = AC - MC = 20$, $BN = BC - CN = 6$.

4) Рассмотрим $\triangle OBA$. Пусть $x = \cos \angle AOB$. Тогда, применяя теорему косинусов, получим

$$AB^2 = BO^2 + OA^2 - 2 \cdot BO \cdot OA \cdot x.$$

Найдем $BO$ и $OA$. Рассмотрим прямоугольный треугольник $ONB$. Известно, что $BN = 6$ и $ON = 4$. По теореме Пифагора, $BO = \sqrt{BN^2 + ON^2} = 2\sqrt{13}$. Аналогично, рассматривая прямоугольный треугольник $MOA$, получим $OA = \sqrt{AM^2 + OM^2} = 4\sqrt{26}$. Тогда уравнение из теоремы косинусов имеет следующий вид:

$$676 = 52 + 416 - 208\sqrt{2} \cdot x \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Откуда следует, что $\angle AOB = 135^\circ$.

5) Введем декартову систему координат $Cxy$, связанную с треугольником $ABC$, где $Cx \parallel AC$ и $Cy \parallel CB$. Координаты точек $O$ и $O_1$ равны:

$$O(4,4), \quad O_1(CA/2, CB/2) = (12,5).$$

Расстояние $OO_1$ равно

$$OO_1 = |\vec{CO} - \vec{CO_1}| = \sqrt{(x_O - x_{O_1})^2 + (y_O - y_{O_1})^2} = \sqrt{(12-4)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{65}$$

6) Рассмотрим прямоугольный треугольник $AOK$. Из теоремы Пифагора найдем: $KA = \sqrt{OA^2 - OK^2} = 20$. Вектор $\vec{CK}$ равен

$$\vec{CK} = \vec{CA} + \vec{AK} = \vec{CA} + AK \cdot \frac{\vec{AB}}{AB} = 24 \cdot (1,0) + \frac{10}{13} \cdot (-24, 10) = \frac{1}{13}(72, 100).$$

Расстояния $MK$ и $NK$ равны

$$MK = |\vec{CK} - \vec{CM}| = \frac{1}{13} \cdot |(20, 100)| = \frac{20\sqrt{26}}{13}, \quad NK = |\vec{CK} - \vec{CN}| = \frac{1}{13} \cdot |(72, 48)| = \frac{24\sqrt{13}}{13}.$$

Далее, $\angle NKM = \angle NOM/2 = 45^\circ$ и площадь треугольника $KMN$ равна

$$S_{KMN} = \frac{MK \cdot MK \cdot \sin \angle NKM}{2} = \frac{480\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ}{2 \cdot 13} = \frac{480 \cdot 2}{4 \cdot 13} = \frac{120\sqrt{2}}{13}.$$

7*) $S_{AO_1OC} = S_{AOO_1} + S_{ACO}$. Площади треугольников $AOO_1$ и $ACO$ равны

$$S_{AOO_1} = \frac{AO_1 \cdot OK}{2} = 26, \quad S_{ACO} = \frac{AC \cdot OM}{2} = 24.$$

В результате получаем: $S_{AO_1OC} = 26 + 24 = 50$. ■