©Viktor Schastnyy

Optimization methods. Homework.

Решить задачу Больца

$$I\big(x(\cdot)\big) = \int_0^\pi [\dot{x}^2(t) + x^2(t) - 4\sin t \cdot x(t)]\, dt + 2x^2(0) + 2x(\pi) - x^2(\pi) \to \inf.$$

1) Найти допустимую экстремаль.
2) Провести исследование методом непосредственной проверки и доказать, что найденная экстремаль доставляет решение в исходной задаче.

В данной задаче интегрант f и терминант ψ имеют вид:

$$f(t, x, \dot{x}) = \dot{x}^2 + x^2 - 4\sin t \cdot x, \quad \psi(x(0), x(\pi)) = 2x^2(0) + 2x(\pi) - x^2(\pi).$$

1. Выпишем необходимые условия экстремума первого порядка:
 а) уравнение Эйлера:

$$-\frac{d}{dt} f_{\dot{x}} + f_x = 0 \Leftrightarrow -\frac{d}{dt} 2\dot{x} + 2x - 4\sin t = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} - x = -2\sin t. \tag{1}$$

 б) условия трансверсальности

$$\begin{cases} 2\dot{x}(0) = 4x(0), \\ 2\dot{x}(\pi) = -2 + 2x(\pi), \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}(0) = 2x(0), \\ \dot{x}(\pi) = x(\pi) - 1. \end{cases} \tag{2}$$

Решая дифференциальное уравнение (1) с начальными условиями (2), получим решение – допустимую экстремаль

$$\hat{x}(t) = e^t + \sin t.$$

2. Покажем, что она доставляет абсолютный минимум в задаче. Действительно, если $h(t) \in C^1[0, \pi]$,

то $\hat{x}(t) + h(t)$ - произвольная допустимая точка в задаче Больца. Тогда

$$I\big(\hat{x}(\cdot) + h(t)\big) - I\big(x(\cdot)\big) =$$

$$= \int_0^\pi [(\dot{\hat{x}} + \dot{h})^2 + (\hat{x} + h)^2 - 4(\hat{x} + h)\sin t]\, dt + \int_0^\pi [\dot{\hat{x}}^2 + \hat{x}^2 - 4\hat{x}\sin t]\, dt +$$

$$+2\big(\hat{x}(0) + h(0)\big)^2 + 2\big(\hat{x}(\pi) + h(\pi)\big) - \big(\hat{x}(\pi) + h(\pi)\big)^2 - 2x^2(0) - 2x(\pi) + x^2(\pi) =$$

$$= 2\int_0^\pi \dot{\hat{x}}\dot{h}\, dt + \int_0^\pi \dot{h}^2\, dt + 2\int_0^\pi \hat{x}h\, dt + \int_0^\pi h^2\, dt - 4\int_0^\pi h\sin t\, dt +$$

$$+4\hat{x}(0)h(0) + 2h^2(0) + 2h(\pi) - 2\hat{x}(\pi)h(\pi) + h^2(\pi) =$$

$$= 2\dot{\hat{x}}h\big|_0^\pi - 2\int_0^\pi \ddot{\hat{x}}h\, dt + \int_0^\pi \dot{h}^2\, dt + 2\int_0^\pi \hat{x}h\, dt + \int_0^\pi h^2\, dt -$$

$$-4\int_0^\pi h\sin t\, dt + 4\hat{x}(0)h(0) + 2h^2(0) + 2h(\pi) - 2\hat{x}(\pi)h(\pi) + h^2(\pi).$$

Учитывая, что

$$\dot{\hat{x}} = e^t + \cos t, \quad \ddot{\hat{x}} = e^t - \sin t,$$

имеем

$$-2\int_0^{\pi} \ddot{\hat{x}} h\,dt + 2\int_0^{\pi} \hat{x} h\,dt - 4\int_0^{\pi} h\sin t = 0$$

и

$$2\dot{\hat{x}}(\pi)h(\pi) - \dot{\hat{x}}(0)h(0) = -4\hat{x}(0)h(0) - 2h(\pi) + 2\hat{x}(\pi)h(\pi).$$

Следовательно,

$$I\big(\hat{x}(\cdot) + h(t)\big) - I\big(x(\cdot)\big) = \int_0^{\pi} \dot{h}^2\,dt + \int_0^{\pi} h^2\,dt + 2h^2(0) + h^2(\pi) \geq 0,$$

для любых допустимых функций $\hat{x} + h \in C^1[0,\pi]$. Поэтому

$$\hat{x}(t) = e^t + \sin t$$

доставляет слабый абсолютный минимум в задаче. ■

Решить простейшую задачу КВИ

$$I\big(x(\cdot)\big) = \int_0^1 [t^2 x(t) - \dot{x}^2(t)]\,dt \to \sup, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0.$$

1) Найти допустимую экстремаль.
2) Провести исследование методом непосредственной проверки и доказать, что найденная экстремаль доставляет решение в исходной задаче.
3) Применить теорему о достаточных условиях экстремума в простейшей задаче КВИ и на её основании еще раз доказать, что найденная допустимая экстремаль доставляет решение в исходной задаче.

Исходную задачу заменим на эквивалентную

$$I\big(x(\cdot)\big) = \int_0^1 f(t,x,\dot{x})\,dt \to \inf, \quad f(t,x,\dot{x}) = \dot{x}^2(t) - t^2 x(t), \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0.$$

1. Найдем допустимые экстремали. Для этого выпишем необходимое условие экстремума первого порядка – уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt} f_{\dot{x}} + f_x = 0 \Leftrightarrow 2\ddot{x} + t^2 = 0.$$

Общее решение данного уравнения имеет вид

$$x(t) = -\frac{t^4}{12} + c_1 t + c_2.$$

Из условий на концах находим, что

$$c_1 = \frac{1}{12}, \quad c_2 = 0.$$

Таким образом, имеется единственная допустимая экстремаль

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{12}(t - t^4). \qquad (3)$$

2. Покажем, что она доставляет абсолютный минимум в задаче. Пусть $h(t) \in C^1[0,1]$. Тогда

$$I\big(\hat{x}(\cdot)+h(t)\big)-I\big(x(\cdot)\big)=2\int_0^1 \dot{\hat{x}}\dot{h}\,dt+\int_0^1 \dot{h}^2\,dt-\int_0^1 t^2 h\,dt.$$

Интегрируя по частям и учитывая (3), получим

$$I\big(\hat{x}(\cdot)+h(t)\big)-I\big(x(\cdot)\big)=2\dot{\hat{x}}h\big|_0^1-\int_0^1(2\ddot{\hat{x}}+t^2)h\,dt+\int_0^1 \dot{h}^2\,dt=\int_0^1 \dot{h}^2\,dt\geq 0.$$

Следовательно, (3) доставляет слабый абсолютный минимум в задаче (в исходной задаче максимум).
3. Проверим (3) на необходимые и достаточные условия экстремума.

а) Усиленное условие Лежандра выполнено:

$$\hat{f}_{\dot{x}\dot{x}}=2>0,\quad \forall t\in[0,1].$$

Следовательно, переходим к проверке условия Якоби.

б) Выпишем уравнение Якоби

$$-\frac{d}{dt}(f_{\dot{x}\dot{x}}\dot{h}+f_{\dot{x}x}h)+f_{x\dot{x}}\dot{h}+f_{xx}h=0\Leftrightarrow \ddot{h}=0.$$

Общее решение данного уравнения имеет вид $h(t)=c_1t+c_2$. Начальным условиям

$$h(0)=0,\quad \dot{h}(0)=1.$$

удовлетворяет функция $h(t)=t$. Эта функция не имеет нулей в полуинтервале $(0,1]$. Значит, сопряженных точек нет, и стало быть, выполнено усиленное условие Якоби. Таким образом, выполнено достаточное условие слабого локального минимума.

в) Проверим условие сильного экстремума. Поскольку $f_{\dot{x}\dot{x}}>0$, то интегрант f является выпуклым по $\dot{x}$ при всех фиксированных t и x. Значит (3) доставляет сильный минимум в задаче (в исходной задаче сильный максимум). ■

Исследовать задачу Больца

$$I\big(x(\cdot)\big)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\dot{x}^2(t)-x^2(t)]\,dt+x^2(0)-x^2(\frac{\pi}{2})+4x(\frac{\pi}{2})\to \inf.$$

1) Найти допустимую экстремаль.
2) Доказать, что данная экстремаль не является решением, т.е. не доставляет локального экстремума в исходной задаче.
3) Доказать, что решения исходной задачи не существует и целевой функционал $I\big(x(\cdot)\big)$ не является ограниченным снизу.

В данной задаче интегрант f и терминант ψ имеют вид:

$$f(t,x,\dot{x})=\dot{x}^2(t)-x^2(t),\quad \psi(x(0),x(\frac{\pi}{2}))=x^2(0)-x^2(\frac{\pi}{2})+4x(\frac{\pi}{2}).$$

1. Выпишем необходимые условия экстремума первого порядка:

а) уравнение Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}f_{\dot{x}}+f_x=0\Leftrightarrow \ddot{x}-x=0. \tag{4}$$

б) условия трансверсальности

$$\begin{cases}\dot{x}(0)=x(0),\\ \dot{x}(\frac{\pi}{2})=x(\frac{\pi}{2})-2.\end{cases} \tag{5}$$

Решая дифференциальное уравнение (4) с начальными условиями (5), получим решение – допустимую экстремаль

$$\hat{x}(t) = e^{(\frac{\pi}{2}-t)}. \tag{6}$$

2. Пусть $h(t) \in C^1[0, \pi/2]$. Тогда

$$I\big(\hat{x}(\cdot) + h(t)\big) - I\big(x(\cdot)\big) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [2\dot{\hat{x}}\dot{h} + \dot{h}^2 - 2\hat{x}h - h^2]\, dt +$$

$$+2x(0)h(0) + h^2(0) - 2x(\frac{\pi}{2})h(\frac{\pi}{2}) - h^2(\frac{\pi}{2}) + 4h(\frac{\pi}{2}).$$

Интегрируя по частям и учитывая (6), получим

$$I\big(\hat{x}(\cdot) + h(t)\big) - I\big(x(\cdot)\big) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{h}^2 - h^2)\, dt + h^2(0) - h^2(\frac{\pi}{2}).$$

Выражение, стоящее в правой части зависит только от функции h и может принимать значение любого знака. Поэтому, допустимая экстремаль (4) не доставляет локального экстремума в исходной задаче.
3. Оценим сверху целевой функционал $I\big(x(\cdot)\big)$. Имеем

$$I\big(x(\cdot)\big) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\dot{x}(t) - x(t)\big)\big(\dot{x}(t) + x(t)\big)\, dt + \big(x(0) - x(\frac{\pi}{2})\big)\big(x(0) + x(\frac{\pi}{2})\big) + 4x(\frac{\pi}{2}) <$$

$$< \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\dot{x}(t) + x(t)\Big)^2 dt + \Big(x(0) + x(\frac{\pi}{2})\Big)^2 + 4x(\frac{\pi}{2}).$$

Возьмем произвольное число $M \in \mathbb{R}$ такую функцию $\tilde{x} \in C^1[0, \pi/2]$, чтобы выполнялось условие

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\dot{\tilde{x}}(t) + \tilde{x}(t)\Big)^2 dt + \Big(\tilde{x}(0) + \tilde{x}(\frac{\pi}{2})\Big)^2 + 4\tilde{x}(\frac{\pi}{2}) = M.$$

Мы получили, для любого числа M, найдется такая допустимая функция $\tilde{x}$, что $I(\tilde{x}) < M$. Значит функционал $I\big(x(\cdot)\big)$ не является ограниченным снизу. ■